

TARDES DE TRABALHO CIM/SPM

RELATÓRIO DA TARDE « OS NOVOS
HORIZONTES EM ÁLGEBRA »

2006



TARDES DE TRABALHO CIM/SPM

INTRODUÇÃO

As tardes de trabalho SPM/CIM são uma iniciativa conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática e do Centro Internacional de Matemática que visa incentivar a colaboração de Matemáticos portugueses em todas as áreas da Matemática. Esta iniciativa consiste numa série de encontros que ocorrem de dois em dois meses nas instalações do CIM, em Coimbra. A lista de encontros já realizados e/ou a realizar encontra-se na página web:

<http://www.spm.pt/investigacao/spmcim/spmcim.phtml>

A última tarde de trabalho de 2006, realizada a 16 de Dezembro, teve como tema os Novos Horizontes em Álgebra e foi organizada pela Professora Gracinda M.S. Gomes, Cordenadora do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa (CAUL) e Professora Catedrática no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

TARDE « OS NOVOS HORIZONTES EM ÁLGEBRA »

OBJECTIVOS

A Álgebra é umas das áreas da Matemática em Portugal, internacionalmente reconhecida, que conta com investigadores praticamente de todas as Universidades Portuguesas. Este encontro teve por objectivo, por um lado, dar a conhecer algum do trabalho em curso nesta área e, por outro, promover o Encontro dos Algebristas Portugueses com o fim de fomentar uma discussão sobre o desenvolvimento futuro desta área do conhecimento.

Contámos com 29 participantes de diversas universidades.

PROGRAMA DA TARDE DE TRABALHO

14:00-14:50 Hipergrupos: do choque de partículas à soma de operadores auto-adjuntos, João Filipe Queiró, Universidade de Coimbra

Resumo: A estrutura de hipergrupo surge naturalmente a propósito de vários problemas de Álgebra que nos últimos anos tiveram soluções relacionadas. Nesta palestra faz-se uma breve descrição desses progressos e dessas relações, e apresentam-se algumas questões em aberto. Os dois problemas principais são: 1) o da descrição dos possíveis espectros da soma de duas matrizes hermiticas com espectros previamente fixados; 2) o da descrição das representações irredutíveis que ocorrem como parcelas directas no produto tensorial de duas dadas representações irredutíveis de $GL(n, \mathbb{C})$. Ambos os problemas têm respostas conhecidas (o primeiro na sequência de trabalhos de Klyachko e Knutson+Tao em 1998 e 1999), e as soluções são em certo sentido « as mesmas »: no caso de n -uplos dados à partida constituídos por inteiros não-negativos, as soluções do segundo problema são indexadas pelos n -uplos de componentes inteiras que ocorrem na solução do primeiro problema. Isto indica uma relação profunda entre órbitas de matrizes hermiticas sob conjugação unitária e representações irredutíveis de $GL(n, \mathbb{C})$. Uma das questões em aberto referidas na palestra é o de estabelecer essa relação usando a fórmula de Kirillov para caracteres.

João Filipe Queiró doutorou-se em 1988 na Universidade de Coimbra, onde actualmente é Professor Catedrático do Departamento de Matemática e membro do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC).

15:00-15:50 Autómatos na Teoria de Grupos, Pedro V. Silva, Universidade do Porto

Resumo: Farei uma breve história das rupturas que o uso de métodos combinatórios/geométricos provocou na teoria de grupos e ilustraremos muitas dessas aplicações com o meu trabalho de investigação recente:

- Origem da teoria combinatória de grupos: Os primeiros problemas e resultados que dão origem à teoria combinatória de grupos como uma área autónoma há cerca de um século devem-se a um topólogo, Max Dehn, e têm como objecto os grupos fundamentais das superfícies.

- Diagramas de van Kampen e estruturas duais: O desenvolvimento de estruturas combinatórias/geométricas/topológicas associadas a apresentações finitas de grupos impulsiona a teoria. Uma parte significativa do meu trabalho de investigação entre 1990 e 1996 envolveu o uso de generalizações destes métodos aos monoides inversos (permutações parciais).

- Ecloração da teoria de linguagens e autómatos: A criação da teoria de linguagens formais por Noam Chomsky e a evolução explosiva da informática teórica trazem

novos problemas à álgebra, incluindo a teoria de grupos, e necessitam da álgebra para o seu próprio desenvolvimento. Exemplos recentes do meu trabalho de investigação recente nesta linha são o estudo dos subconjuntos racionais dos grafos de grupos (com Mark Kambites e Ben Steinberg).

- Subgrupos do grupo livre: O algoritmo de Reidemeister-Serre-Stallings e a teoria que o rodeia ainda não estão totalmente explorados. Em colaboração com Pascal Weil, obtive recentemente um algoritmo geométrico que permite determinar, de forma mais elegante e eficiente que os algoritmos clássicos, se um subgrupo finitamente gerado do grupo livre é ou não um factor livre.

- Grupos hiperbólicos: Os grupos hiperbólicos de Mikhail Gromov trazem a geometria do grafo de Cayley para o primeiro plano da teoria de grupos. Em colaboração com Julien Cassaigne, tenho obtido resultados relativos a certas classes de sistemas de reescrita que envolvem conceitos geométricos, topológicos e dinâmicos num contexto mais alargado com consequências por vezes surpreendentes.

- Grupos automáticos: Os grupos automáticos introduzidos por David Epstein *et al.* generalizam o conceito de grupo hiperbólico relacionando propriedades geométricas do grafo de Cayley com propriedades computacionais (via teoria de linguagens e autómatos). Em colaboração com Ben Steinberg, obtive a primeira caracterização geométrica dos monóides automáticos.

- Grupos auto-similares: Popularizados por Rostislav Grigorchuk neste novo século, estes grupos de funções sequenciais definidas a partir de autómatos finitos estão a revolucionar a visão dos grupos infinitos. Com Mark Kambites e Ben Steinberg, generalizei resultados de Rostislav Grigorchuk e Andrej Zuk para calcular o espectro e as medidas espectrais dos grupos gerados pelas máquinas de Cayley de grupos finitos.

Pedro V. Silva doutorou-se em 1991 na Universidade de Glasgow, Reino Unido. É actualmente Professor Catedrático do Departamento de Matemática Pura da Universidade do Porto e membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

Café

16:20-17:10 Reticulados Dimensionais, Catarina Santa-Clara, Universidade de Lisboa

Resumo: A noção de dimensão uniforme de um anel e de um módulo foi introduzida por A.W. Goldie, em 1958 e 1960, respectivamente, sendo actualmente também conhecida como dimensão de Goldie. É uma ferramenta extremamente útil em teoria de Módulos, permitindo, nalguns casos, obter generalizações de resultados conhecidos para espaços vectoriais. No entanto, as conhecidas fórmulas para a dimensão de espaços vectoriais:

$$(1) d(A+B) = d(A) + d(B) \cdot d(A \cdot B)$$

$$(2) d(E) = d(E/A) + d(A),$$

não são válidas, em geral, para a dimensão de Goldie de um módulo.

V.P. Camillo e J.M. Zelmanowitz (1978 e 1980) observaram que a dimensão de Goldie satisfaz fórmulas semelhantes, onde aparecem parcelas de erro extra. Apesar de os seus resultados serem interessantes, a fórmula de tipo (1) obtida é difícil de utilizar, na prática.

Nesta palestra, pretende-se mostrar fórmulas um pouco mais gerais que as de Camillo e Zelmanowitz, usando a Teoria de Reticulados, e procurando obter como corolário as fórmulas duais (para a noção dual de dimensão de Goldie . a co-dimensão de Goldie). As fórmulas obtidas são também mais facilmente computáveis, em exemplos práticos. Mostra-se como técnicas relativamente pouco sofisticadas de Teoria de Reticulados permitem obter resultados interessantes em teoria de Módulos.

Catarina Santa-Clara doutorou-se em 1998 na Universidade de Glasgow, Reino Unido. É actualmente Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e membro do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa (CAUL).

17:20-19:00 Discussão sobre os novos horizontes em Álgebra (moderação: Jorge Almeida (FCUP) e José António Perdigão Dias da Silva (FCUL))

DISCUSSÃO

Foram moderadores do debate os Professores José António Perdigão Dias da Silva, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e do Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias/UL, e Jorge Manuel Meneses Guimarães de Almeida, da Faculdade de Ciências e do Centro de Matemática da Universidade do Porto.

O Professor J.A. Dias da Silva abriu o debate com uma breve história do desenvolvimento da Álgebra em Portugal. Os moderadores lançaram para o debate algumas questões :

- Centralidade versus periferia dos tópicos estudados em Portugal ?
- Quais os tópicos mais importantes na formação de um algebrista ?
- Quais os tópicos mais importantes para um estudante do ensino universitário ?
- A disciplina de Álgebra tem vocação para as aplicações ?
- Devem as aplicações desempenhar um papel importante para o desenvolvimento da disciplina ?
- Qual a evolução daqui a 20 anos? Temos assegurado o futuro ?

- Faz sentido falar de Álgebra em Portugal ? Faz sentido separar as disciplinas ?

Iniciou-se então uma animada discussão entre os participantes, sendo de salientar as seguintes conclusões :

- A importância de desenvolver acções de colaboração com outras áreas quer em Matemática quer em áreas de investigação afins.
- A importância do reforçar das acções inter-universitárias no âmbito da investigação e também da formação do 3º ciclo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CIM e à SPM e, em particular, ao Professor Joaquim Júdice, o convite para organizar esta Tarde de Trabalho; aos oradores, aos moderadores do debate e a todos os participantes a sua inestimável colaboração.

Agradeço também a todas as instituições que apoiaram a participação dos seus membros neste Encontro.

Lisboa, 8 de Março de 2007

Gracinda M.S. Gomes
(ggomes@cii.fc.ul.pt)