Localização Discreta - modelos e técnicas

Maria Eugénia Captivo

Universidade de Lisboa - Faculdade de Ciências
Centro de Investigação Operacional
Departamento de Estatística e Investigação Operacional
Portugal

E-Mail: mecaptivo@fc.ul.pt

Investigação parcialmente suportada pelo projecto POCTI/ISFL-1/152

Nos **problemas de localização** procura-se **instalar** um determinado tipo de serviço ou equipamento, para **servir** da **'melhor forma'** um conjunto de **comunidades** cujas **localizações e necessidades são conhecidas**.

Decidir:

- o **número** e a **localização dos equipamentos**,
- a **dimensão** ou **capacidade** de cada serviço ou equipamento,
- a **afectação** dos locais de procura aos equipamentos instalados,

por forma a optimizar alguma função objectivo.

Essencialmente os **modelos de localização** diferem uns dos outros:

- no **tipo de função a optimizar**,
- nas **características do espaço das soluções**.

Os possíveis locais para instalar os serviços podem (ou não) coincidir com os clientes a servir.

Os modelos de localização contínuos são talvez mais estudados, mas aqui vamos considerar **modelos de localização discreta numa rede**.

Os locais potenciais para abrir serviços não estão disponíveis em qualquer ponto do espaço. Particularmente no caso de serviços indesejáveis.

O tipo de função a optimizar depende da natureza das actividades ou equipamentos a instalar.

A maioria dos modelos de localização trata de **serviços desejáveis** (armazéns, centros de serviços ou transportes, serviços de emergência, etc.) os quais interagem com os clientes obrigando a deslocações.

Os critérios habituais incluem a minimização de alguma função da distância entre os serviços e/ou os clientes (o tempo médio de viagem, o tempo médio de resposta, o custo do tempo de viagem ou de resposta, o tempo/custo máximo de viagem, etc.).

Serviço privados

(localizar armazéns ou unidades industriais)

O objectivo será minimizar os custos de fabrico e distribuição dos produtos.

- um critério típico para estes casos inclui **a minimização duma função das distâncias**, **custos** ou **tempos de viagem** entre cada utilizador e o serviço mais próximo (tempo médio de viagem, tempo médio de resposta, alguma função custo do tempo médio de viagem ou do tempo médio de resposta, valor máximo do tempo/custo, etc).

Serviços públicos

O objectivo a atingir é mais difícil de definir. Os critérios mais utilizados são:

Medianas

- **a minimização da soma das distâncias**, **custos** ou **tempos de viagem** de cada utilizador ao serviço mais próximo;

(localização óptima de escolas públicas para servir uma certa região)

Centros

- **a minimização da maior distância** (**tempo**, **custo**) entre um utilizador e o serviço mais próximo.

(localização de serviços de emergência tais como bombeiros, postos de ambulâncias, esquadras de polícia)

Pode ainda ser incluída na função-objectivo uma parcela referente aos custos fixos de construção e/ou instalação dos serviços.

Restrições Adicionais

- número de serviços a instalar;
- restrições de capacidade máxima e/ou mínima dos serviços;
- restrições na distância máxima e/ou mínima entre cada utilizador e o serviço mais próximo;
- restrições ao investimento total;
- questões de hierarquização dos serviços; ...

Em algumas situações, os utilizadores **não são servidos directamente** nos equipamentos instalados, mas sim **através de veículos** que saem do depósito, percorrem um certo conjunto de clientes, retornando depois ao depósito.

Nestes casos, pretende-se **localizar os serviços** de forma a **minimizar os custos totais**, incluindo também:

- os custos de instalação dos serviços;
- os custos dos veículos;
- os custos das rotas a serem efectuadas garantindo o serviço a todos os clientes.

Trata-se assim de combinar os **problemas de localização** com os **problemas de distribuição**.

Também neste caso os possíveis locais para instalar os serviços ou depósitos podem **coincidir ou não** com os clientes a servir.

Podemos considerar diversas situações:

- a existência de um ou mais veículos em cada depósito, todos iguais ou diferentes;
- a existência ou não de restrições de capacidade nos depósitos para além das limitações de capacidade dos veículos;
- a existência ou não de limitações no número de serviços a instalar;
- a existência ou não de restrições no tempo máximo de qualquer viagem;
- a existência de incompatibilidades entre dois ou mais dos produtos;
- imposições no horário em que cada cliente pode ser visitado.

Os primeiros trabalhos na área de **localização-distribuição** datam de 1980/1981 mas, apesar das variadas aplicações reais, a complexidade do problema ainda não permitiu a sua resolução eficiente.

Problemas de Localização Discreta numa Rede

I = { 1, ..., **i**, ..., n }   o conjunto das comunidades ou clientes a servir

J = { 1, ..., **j**, ..., m }   o conjunto dos locais possíveis para instalar os serviços

f_j o custo fixo de construir e/ou instalar um equipamento em **j**

c_{ij} o custo de servir na totalidade a comunidade **i** pelo equipamento instalado no local **j**

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{se e instalado um serviço em j} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

X_{ij} a fracção da população da comunidade i que é servida pelo serviço instalado em j ($i \in I$; $j \in J$)

(PLS) Min $\displaystyle \sum_{j=1}^{m} f_j Y_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} X_{ij}$ (1)

sujeito a:

$\displaystyle \sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1$ i=1, ..., n   (2)

$X_{ij} \leq Y_j$ i=1, ..., n ; j=1, ..., m   (3)

$Y_j \in \{0,1\}$ j=1, ..., m   (4)

$X_{ij} \geq 0$ i=1, ..., n ; j=1, ..., m   (5)

Os Problemas de Localização Discreta são da classe *NP – Difícil (*alguns admitem casos particulares resolúveis em tempo polinomial).

Quando existem **restrições de capacidade máxima e/ou mínima nos serviços** a instalar, basta substituir, as restrições (3) por

$$q_j Y_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_i X_{ij} \leq Q_j Y_j \qquad j=1, ..., m \qquad (6)$$

onde:

$\boldsymbol{q_j}$ é a capacidade mínima do serviço a instalar em j
$\boldsymbol{Q_j}$ é a capacidade máxima do serviço a instalar em j
$\boldsymbol{a_i}$ é a população da comunidade **i** ou a necessidade do cliente **i**

Quando se exige que cada comunidade ou cliente seja servido na totalidade por um só equipamento:

$$\boldsymbol{X_{ij}} \in \{ 0, 1 \} \qquad i=1, ..., n \; ; \; j=1, ..., m \qquad (7)$$

É o que se passa nos problemas de localização associados a redes de **telecomunicações**.

Quando existem **restrições adicionais**…

- no **número** de serviços a instalar:

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j \;=(\leq,\geq)\; p \qquad (8)$$

- no **investimento**, considerando **apenas os custos fixos**:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j\, Y_j \;\leq\; F \qquad (9)$$

- ou considerando **também os custos de expansão** $\mathbf{b_j}$ de cada equipamento **j**:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j\, Y_j + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_{ij} \;\leq\; F \qquad (10)$$

Quando os serviços a instalar são de **emergência**, como por exemplo:

- esquadras de polícia;
- quartéis de bombeiros;
- postos de ambulâncias;
- ...

é mais adequado **minimizar a distância máxima entre cada comunidade e o equipamento mais próximo**, ou seja, **minimizar o tempo máximo de resposta**.

Podemos também analisar a substituição do critério de minimização dos custos pela **maximização da utilidade**, utilizando **modelos de localização multiobjectivo** (*Ross e Soland*,1980; *Burkard, Krarup e Pruzan*, 1982; *Krarup e Pruzan*, 1981).

Durante os últimos vinte anos, os responsáveis pelo planeamento/desenvolvimento das áreas onde os novos equipamentos vão ser instalados (i.e., governo central, autoridades locais) <u>bem como os residentes</u>, têm mostrado um interesse crescente em **preservar a qualidade de vida**.

Isto é especialmente importante em **serviços com implicações ambientais**:

- **equipamentos emissores de partículas ou de barulho, armazéns de materiais inflamáveis, fábricas poluentes;**
- **aterros sanitários, estações de tratamento de resíduos, lixeiras, centrais de tratamento de esgotos, prisões, grandes aeroportos;**
- **instalações nucleares e militares**;
- **...**

Novos termos foram introduzidos em teoria da localização, tais como:

- **nóxio**,
- **obnóxio**,
- **semi-obnóxio**,
- **perigoso,**
- **...**

associados à localização de serviços que implicam algum risco ou efeito desagradável.

O critério de optimalidade tradicional de **proximidade** (**localizar o serviço o mais próximo possível das comunidades a servir**) é substituído pelo critério oposto (**localizar o equipamento o mais longe possível das comunidades,** assegurando a acessibilidade dos pontos de procura).

Síndroma ***NIMBY*** (***NOT IN MY BACK YARD***)

Frequentemente as leis e regulamentos governamentais impõem:

- níveis mínimos de qualidade,
- níveis máximos de degradação,
- proibições absolutas.

As questões ambientais nas abordagens à localização de equipamentos indesejáveis têm geralmente sido formuladas como restrições ou incluídas através de um critério substituto (distância) numa estrutura mono-objectivo.

Contudo eles mexem com uma **quantidade de objectivos conflituosos**. Não se pode esperar que os modelos mono-objectivo representem adequadamente problemas deste tipo (Erkut e Neuman, 1989).

Modelar questões ambientais como objectivos, por oposição a restrições, gerará mais informação relativamente ao custo e a outras implicações das questões ambientais (Current *et al,* 1990).

Vamos tratar apenas de problemas em Programação Matemática com Objectivos Múltiplos.

As **abordagens multiatributo** permitem um estudo mais detalhado de um pequeno número de soluções conhecidas explicitamente. Contudo, são incapazes de tomar em consideração todas as possíveis soluções definidas implicitamente por um modelo combinatório. Assim, mais do que formas alternativas de análise, elas podem ser complementares.

Surpreendentemente as ferramentas de decisão multiobjectivo mal têm sido utilizadas na literatura de localização de equipamentos indesejáveis. Só uma muito pequena percentagem das publicações nesta área trata de modelos ou ferramentas multicritério.

Em alguns trabalhos podemos encontrar modelos de localização multiobjectivo, mas os procedimentos utilizados para os resolver parecem inadequados.

Vários objectivos (conflituosos) **podem ser considerados:**

- minimizar o **risco** ou o **efeito obnóxio** sofrido pelas comunidades;
- maximizar a **acessibilidade** das comunidades aos serviços instalados mais próximos;
- minimizar o **custo** total;
- maximizar a **equidade**;
- ...

Para lidar com este tipo de modelos (multiobjectivo) podemos escolher uma das abordagens:

- **articulação *a posteriori* das preferências do decisor (métodos geradores);**
- **articulação *a priori* das preferências do decisor (de que se destacam os métodos que utilizam uma função utilidade);**
- **articulação progressiva das preferências do decisor (métodos interactivos) na pesquisa de uma solução eficiente "satisfatória".**

Neste tipo de problemas o número de soluções eficientes pode ser muito grande. Apresentar ao decisor todas as soluções eficientes e esperar que ele/ela seja capaz de escolher uma boa solução não é realista.

Em geral não acreditamos que o decisor tenha alguma forma razoável de definir uma função de utilidade *a priori* para ser maximizada.

Pensamos que os **métodos interactivos** são a melhor escolha, particularmente se forem vistos como **processos de aprendizagem** (melhorando o conhecimento sobre o problema) e não como formas de pesquisa de alguma solução ‘óptima’.

Devem ser desenhados de forma que possam ser úteis em **situações de decisão em grupo** e em **processos de negociação**, pois este tipo de problemas implica frequentemente **decisões em grupo e negociação entre vários decisores**.

Também deve ser possível fazer uma **análise *a posteriori*** na vizinhança da solução preferida por forma a escolher a ‘melhor’ solução a ser implementada.

Análise *a posteriori* significa analisar em detalhe, soluções qualitativamente indiferentes, em termos dos modelos multicritério previamente utilizados.

Vamos considerar que o **conjunto de localizações potenciais foi previamente identificado**.

As **abordagens multiobjectivo discretas** implicam duas grandes dificuldades:

- a necessidade de lidar com **várias dimensões**,
- o **grande número de soluções eficientes** para descobrir e analisar.

É de grande importância o uso de **métodos interactivos**.

A **incerteza** é uma questão chave em problemas de localização.

Assim, a abordagem multicritério é adequada para identificar os critérios relacionados com a parte estável da estrutura de preferências do decisor.

Vamos ver algumas Abordagens a Problemas de Localização de Equipamentos com implicações ambientais.

Fonseca & Captivo, 1996; … Fonseca, 2006

Modelos bicritério para a localização de equipamentos semiobnóxios.

Instalar os serviços de modo a:

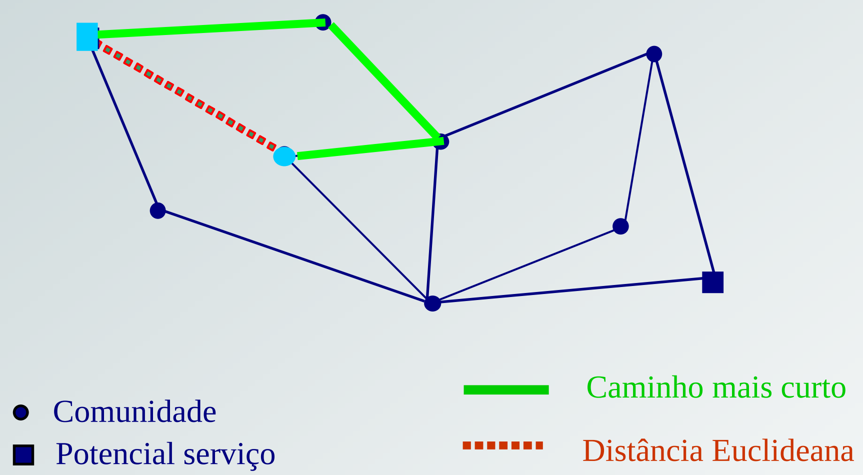
- **minimizar o efeito obnóxio** exercido sobre as comunidades;
- **maximizar a acessibilidade** aos serviços instalados mais próximos.

Estes **objectivos contraditórios** podem ser encarados sob diversas perspectivas:

- **Optimizar o valor total (valor médio);**
  - ✓ Maximização da acessibilidade **média** das comunidades aos serviços
  - ✓ Minimização do efeito obnóxio **total** exercido pelos serviços
- **Optimizar o pior caso.**
  - ✓ Maximização da acessibilidade da comunidade **pior servida**
  - ✓ Minimização do efeito obnóxio sofrido pela comunidade **mais exposta**

Devemos considerar dois tipos de distância:

- **Distância Euclidiana** (permite avaliar o efeito obnóxio);
- **Comprimento do caminho mais curto** (permite determinar a acessibilidade).



EFEITO OBNÓXIO

é função da distância Euclidiana entre comunidades e serviços, e da população de cada comunidade.

O efeito obnóxio é inversamente proporcional à distância Euclidiana (ou ao seu quadrado) e depende também de factores como o relevo, os ventos, a temperatura, a humidade, ...

$\mathbf{J} =$ $\{1, 2, ..., m\}$ potenciais locais para instalação de serviços

$\mathbf{I} =$ $\{1, 2, ..., n\}$ comunidades a servir

$\mathbf{a_i}$ - peso (população) da comunidade $\mathbf{i \in I}$

$\mathbf{d_{ij}}$ - distância euclidiana entre a comunidade $\mathbf{i \in I}$ e o potencial local $\mathbf{j \in J}$

$\mathbf{c_{ij}}$ - comprimento do caminho mais curto entre cada comunidade $\mathbf{i \in I}$ e cada potencial local $\mathbf{j \in J}$

$\mathbf{d}$ - distância euclidiana mínima entre cada comunidade $\mathbf{i \in I}$ e cada potencial local $\mathbf{j \in J}$

$\mathbf{J'} = \{ \mathbf{j \in J : d_{ij} \geq d}, \forall \ \mathbf{i \in I} \}$

$\mathbf{D}$ - distância máxima entre cada comunidade $\mathbf{i \in I}$ e o serviço a que fica afecta

$\mathbf{M_i} = \{ \mathbf{j \in J' : c_{ij} \leq D} \}, \forall \ \mathbf{i \in I}$

$\ell_j =$ o efeito obnóxio total exercido pelo serviço $\mathbf{j \in J}$ sobre todas as comunidades

$\delta_{ij} =$ o efeito obnóxio sofrido pela comunidade $\mathbf{i \in I}$ se o equipamento $\mathbf{j \in J}$ estiver em funcionamento

$\mathbf{q_i}$ - quantidade de serviço requerido pela comunidade $\mathbf{i \in I}$

$\mathbf{Q_j}$ - capacidade máxima do potencial local $\mathbf{j \in J}$

Modelos bicritério sem restrições de capacidade

(11) $\min \sum_{j \in J'} \sum_{i \in I} a_i c_{ij} x_{ij}$ **ou** $\min \max_{i \in I,\, j \in J'} c_{ij} x_{ij}$ (12)

(13) $\min \sum_{j \in J'} \ell_j \, Y_j$ **ou** $\min \max_{i \in I} \sum_{j \in J'} \delta_{ij} \, Y_j$ (14)

sujeito a:

$$\sum_{j \in M_i} X_{ij} = 1 \qquad i \in I \qquad (15)$$

$$X_{ij} \leq Y_j \qquad j \in J' \qquad (16)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \qquad i \in I;\ j \in M_i \qquad (17)$$

$$Y_j \in \{0,1\} \qquad j \in J' \qquad (18)$$

$$\sum_{\substack{k \in J' \\ c_{ij} < c_{ik}}} X_{ik} + Y_j \leq 1 \qquad i \in I;\ j \in J' \qquad (19)$$

Modelos bicritério com restrições de capacidade

(20) $\min \sum_{j \in J'} \sum_{i \in I} q_i \, c_{ij} x_{ij}$ **ou** $\min \max_{i \in I,\, j \in J'} q_i \, c_{ij} x_{ij}$ (21)

(13) $\min \sum_{j \in J'} \ell_j \, Y_j$ **ou** $\min \max_{i \in I} \sum_{j \in J'} \delta_{ij} \, Y_j$ (14)

sujeito a:

$\sum_{j \in M_i} X_{ij} = 1$ $\quad$ $i \in I$ (15)

$\sum_{i \in I} q_i \, X_{ij} \leq Q_j \, Y_j$ $\quad$ $j \in J'$ (22)

$X_{ij} \geq 0$ $\quad$ $i \in I;\ j \in M_i$ (23)

$Y_j \in \{0,1\}$ $\quad$ $j \in J',\ t \in T_j$ (18)

Se em cada potencial local $j \in J'$ pode ser instalado um de entre vários tipos de serviços, temos:

T_j = conjunto de tipos de serviço que podem ser instalados em $j \in J'$

B_{jt} = capacidade máxima de um serviço de tipo $t \in T_j$ a instalar em $j \in J'$

b_{jt} = capacidade mínima de um serviço de tipo $t \in T_j$ a instalar em $j \in J'$

δ_{ijt} = efeito obnóxio sofrido pela comunidade $i \in I$ se o equipamento de tipo $t \in T_j$ estiver em funcionamento no potencial local $j \in J'$

Modelos bicritério com restrições de capacidade por níveis

(20) $$\min \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I} q_i c_{ij} x_{ij}$$ **ou** $$\min \max_{i\in I,\, j\in J'} q_i\, c_{ij} x_{ij}$$ (21)

(24) $$\min \sum_{j\in J'}\sum_{t\in T_j} \ell_{jt}\ Y_{jt}$$ **ou** $$\min \max_{i\in I} \sum_{j\in J'}\sum_{t\in T_j} \delta_{ijt}\, Y_{jt}$$ (25)

sujeito a:

$\sum_{j\in M_i} X_{ij} = 1$	$i\in I$	(15)
$\sum_{t\in T_j} Y_{jt} \leq 1$	$j\in J'$	(26)
$b_{jt}\ Y_{jt} \leq w_{jt} \leq B_{jt}\ Y_{jt}$	$j\in J', t\in T_j$	(27)
$\sum_{i\in I} q_i\ X_{ij} = \sum_{t\in T_j} w_{jt}$	$j\in J'$	(28)
$X_{ij} \geq 0$	$i\in I; j\in M_i$	(23)
$Y_{jt} \in \{0,1\}$	$j\in J', t\in T_j$	(29)
$w_{jt} \geq 0$	$j\in J', t\in T_j$	(30)

Ferreira, 1997; Ferreira et al., 1999

Modelo linear inteiro misto bicritério para a **localização de serviços semiobnóxios** incorporando a fase de **construção das rotas para recolha de resíduos**, considerando:

- minimização do **custo total** (**F_1**)
- minimização do **efeito obnóxio dos serviços abertos e do risco associado à fase de transporte** (**F_2**)

$\mathbf{I} = \{1, 2, ..., m\}$ pontos de procura

$\mathbf{J} = \{m+1, m+2, ..., n\}$ potenciais locais para instalação de serviços

$\mathbf{V} = \{1, 2, ..., q\}$ veículos para a recolha dos resíduos

$\mathbf{T} = \{1, 2, ..., p\}$ tipos de serviços

$\mathbf{N} = \{I\} \cup \{J\}$

$\mathbf{D_i}$ procura total da comunidade $\mathbf{i \in I}$

$\mathbf{P_k}$ capacidade do veículo $\mathbf{k \in V}$

$\mathbf{Q_{jt}}$ capacidade máxima de um serviço de tipo $\mathbf{t \in T}$ instalado em $\mathbf{j \in J}$

$\mathbf{D_{ij}}$ distância euclidiana entre $\mathbf{i \in I}$ e $\mathbf{j \in J}$

$\mathbf{c_{ij}}$ comprimento do caminho mais curto entre $\mathbf{i \in N}$ e $\mathbf{j \in N}$

w, s parâmetros a usar no cálculo do efeito obnóxio dos serviços

$\mathbf{r_{ij}}$ risco associado com o caminho mais curto entre $\mathbf{i \in N}$ e $\mathbf{j \in N}$

$\mathbf{r_k}$ coeficiente de risco associado à utilização do veículo $\mathbf{k \in V}$

$\mathbf{c_k}$ custo (por unidade de peso e distância) do veículo $\mathbf{k \in V}$

f^1_{jt} custo unitário de investimento de um serviço de tipo $\mathbf{t \in T}$ instalado em $\mathbf{j \in J}$

f^2_{jt} custo unitário de funcionamento de um serviço de tipo $\mathbf{t \in T}$ instalado em $\mathbf{j \in J}$

$$\ell_{jt} = \sum_{i \in I} D_i \, (d_{ij})^{-w} \, (Q_{jt})^s$$ efeito obnóxio de um serviço de tipo **t∈T** instalado em **j∈J**

variáveis de decisão:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo k vai directamente do nodo i para o nodo } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{se um serviço de tipo } t \text{ é aberto no nodo } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

funções objectivo:

$$\min \quad F_1 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in V} c_k P_k c_{ij} x_{ijk} + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} Q_{jt} f_{jt}^1 z_{jt} + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} Q_{jt} f_{jt}^2 z_{jt} \tag{31}$$

$$\min \quad F_2 = \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \ell_{jt} z_{jt} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in V} r_k \, r_{ij} \, x_{ijk} \tag{32}$$

s. a: $$\sum_{j\in N}\sum_{k\in V} x_{jik} = 1 \qquad \forall i \in I \qquad (33)$$

$$\sum_{i\in N} x_{ihk} - \sum_{j\in N} x_{hjk} = 0 \qquad \forall k \in V, \forall h \in N \qquad (34)$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{jik} \leq 1 \qquad \forall k \in V \qquad (35)$$

$$\sum_{i\in I} D_i \sum_{j\in N} x_{ijk} \leq P_k \qquad \forall k \in V \qquad (36)$$

$$\sum_{k\in V} P_k \sum_{i\in I} x_{jik} - \sum_{t\in T} z_{jt} Q_{jt} \leq 0 \qquad \forall j \in J \qquad (37)$$

$$\sum_{t\in T} z_{jt} \leq 1 \qquad \forall j \in J \qquad (38)$$

$$y_i - y_j + n\sum_{k\in V} x_{ijk} \leq n-1 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j \qquad (39)$$

$$\boldsymbol{x_{ijk}} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \in N, i \neq j ; \forall k \in V \qquad (40)$$

$$\boldsymbol{z_{jt}} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J; \forall t \in T \qquad (41)$$

$$\boldsymbol{y_i} \geq 0 \qquad \forall i \in I \qquad (42)$$

Dias, Captivo & Clímaco, 2002...

Temos estado a desenvolver um **sistema de apoio à decisão** dedicado ao estudo de **Problemas de Localização Dinâmica de Equipamentos para Transferência, Tratamento e Deposição de Resíduos Sólidos Urbanos**.

Pretende-se localizar **três tipos de serviços** distintos:

- **aterros sanitários**,
- **postos de transferência**,
- **incineradoras**

cujo número pode ser, ou não, conhecido à partida, existindo um número limitado, e conhecido, de localizações possíveis.

Vamos estudar apenas a **localização dos serviços** associada à **afectação dos resíduos provenientes dos vários pontos origem**, não incluindo o estudo das rotas óptimas para a circulação dos resíduos.

Complexidade global ⇒ **Decomposição do problema** ⇒ **Limitações na qualidade dos resultados**

Os **principais intervenientes** no processo de decisão, com preocupações distintas, são:

- as várias **autarquias**,
- o **Estado**,
- a **empresa concessionária**.

A **empresa concessionária** pretende:

- minimizar os custos
- maximizar as receitas.

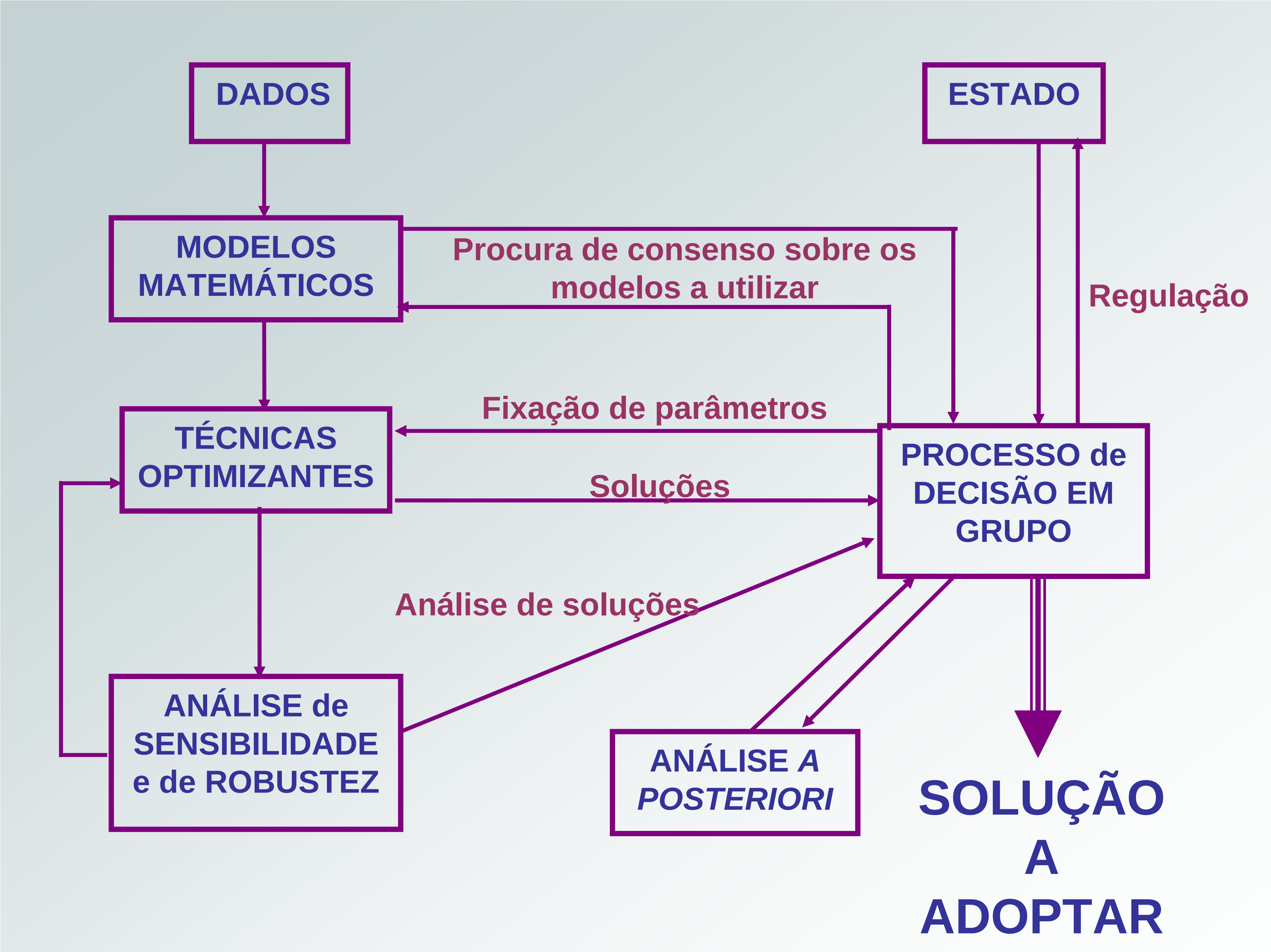
As **autarquias** querem:

- minimizar os custos de transporte,
- minimizar os pagamentos à empresa concessionária,
- maximizar a distância das suas populações aos aterros e incineradoras,
- minimizar a distância aos postos de transferência.

Pretender-se-á ainda **minimizar a contestação das populações**, o que significa, por exemplo, limitar a capacidade de um aterro sanitário que eventualmente possa vir a ser localizado no seu concelho.

As autarquias também podem ter interesses na empresa concessionária.

Ao **Estado** cabe uma **função reguladora**, promovendo a **equidade** e um nível de **qualidade** dos serviços aceitável na sociedade como um todo.


DADOS
ESTADO
MODELOS MATEMÁTICOS
Procura de consenso sobre os modelos a utilizar
Regulação
Fixação de parâmetros
TÉCNICAS OPTIMIZANTES
Soluções
PROCESSO de DECISÃO EM GRUPO
Análise de soluções
ANÁLISE de SENSIBILIDADE e de ROBUSTEZ
ANÁLISE *A POSTERIORI*
SOLUÇÃO A ADOPTAR

$\boldsymbol{I = \{1,...,n\}}$ localidades produtoras de resíduos.

$\boldsymbol{J = \{1,...,m\}}$ possíveis localizações para os aterros sanitários.

$\boldsymbol{K = \{1,...,p\}}$ possíveis localizações para os postos de transferência.

$\boldsymbol{L = \{1,...,r\}}$ possíveis localizações para uma incineradora.

$\boldsymbol{S = \{1,...,q\}}$ possíveis dimensões para os módulos que constituem os postos de transferência a localizar, ordenado por ordem crescente de dimensão. Um módulo de dimensão $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$ terá dimensão $\boldsymbol{Q_s}$.

$N^k_{\max}$ = Número máximo de módulos que podem ser instalados em $\boldsymbol{k}$.

$\boldsymbol{d_i^t}$ = quantidade de resíduos produzidos na localidade $\boldsymbol{i}$ no período $\boldsymbol{t}$.

$\boldsymbol{T}$ = número de períodos temporais a considerar.

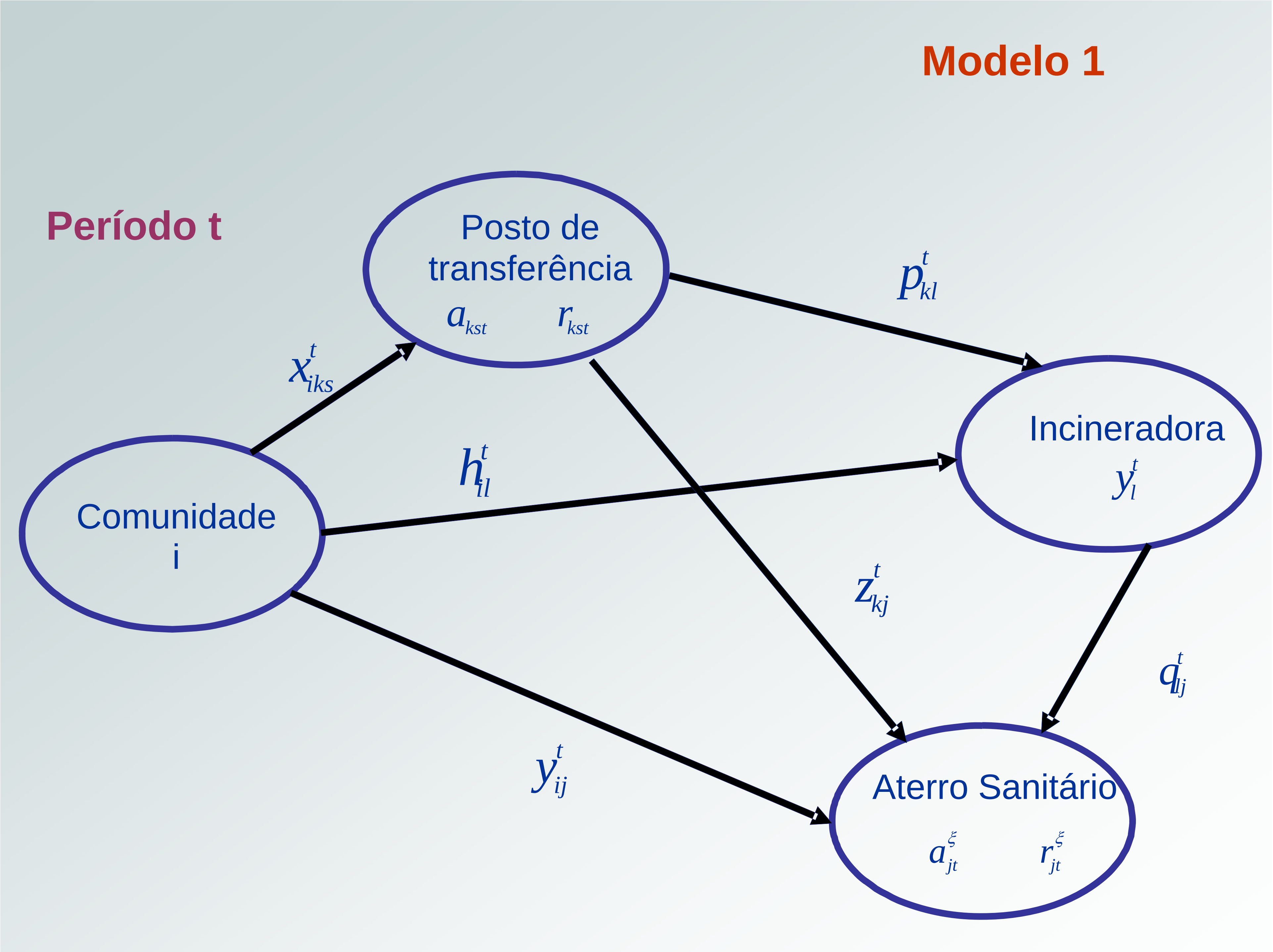
$\boldsymbol{Q_j}$ = capacidade máxima do aterro localizado em $\boldsymbol{j}$, quando da sua abertura ou do aumento da sua capacidade.

$Q^l_{\min}$, $Q^l_{\max}$ = Capacidade mínima e máxima de uma incineradora na localidade $\boldsymbol{l}$.

α_l = percentagem de resíduos resultantes da incineração em $\boldsymbol{l}$ (geralmente na forma de cinzas) que têm de ser depositados em aterros.

$$\theta_p = \begin{cases} \alpha_l \, , & \text{se } l \text{ pertence a } p \\ 1, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Tipo de Serviço	Custos: Custos Fixos	Custos: Custos Variáveis
Aterro Sanitário	**Abertura** e **funcionamento** durante os períodos considerados	**Transporte** de resíduos **Tratamento** dos resíduos
	Encerramento e **manutenção** após o encerramento	
	Reabertura e **funcionamento** durante os períodos considerados	**Transporte de resíduos** **Tratamento dos resíduos**
	Encerramento e **manutenção** após o encerramento	
Posto de Transferência	**Abertura e funcionamento** até ao fim do horizonte temporal	**Transporte de resíduos** **Manipulação dos resíduos** **Transporte de resíduos**
Incineradora	**Abertura e funcionamento** até ao fim do horizonte temporal	**Transporte de resíduos** **Tratamento dos resíduos** **Transporte de resíduos**


Modelo 1
Período t
Posto de transferência
a_{kst} r_{kst}
p_{kl}^{t}
x_{iks}^{t}
Incineradora
y_{l}^{t}
h_{il}^{t}
Comunidade i
z_{kj}^{t}
q_{lj}^{t}
y_{ij}^{t}
Aterro Sanitário
a_{jt}^{ξ} r_{jt}^{ξ}

Usar **variáveis** x_{iks}^{t} em vez de **variáveis** x_{ik}^{t} **(**sem referência à dimensão do módulo), **permite distinguir custos de manipulação de resíduos nos módulos que constituem os postos de transferência, tendo em conta a sua dimensão.**
(é natural que os custos unitários de manipulação de resíduos em módulos de menor dimensão sejam superiores aos dos módulos de maiores dimensões)

Usar **variáveis** a_{kst} **e** r_{kst} **permite diferenciar os custos de instalar pela primeira vez um posto de transferência ou de instalar módulos onde já se encontra em funcionamento um posto de transferência.**
(os custos de abertura de um posto de transferência numa localidade onde não existia nenhum, têm em conta custos de aquisição de terrenos, melhorias em infra-estruturas, etc., que não têm de se ter em conta em instalações posteriores de outros módulos no mesmo posto de transferência)

Os **custos** FA_{kst} deverão ser **iguais a** FR_{kst} **mais os custos inerentes à abertura**, pela primeira vez, de um posto de transferência em ***k***.

Instala-se apenas um módulo aquando da abertura do posto de transferência numa localidade *k* (a_{kst} **= 0 ou 1**).

Para **localizar mais do que um módulo aquando da abertura** do posto de transferência, devem **considerar**-se as **variáveis** r_{kst} **.**

Restrições (Modelo 1)

- **Garantia do transporte de todos os resíduos produzidos para os locais dos vários tipos de serviço, em todos os períodos**

$$\sum_k \sum_s x_{iks}^t + \sum_j y_{ij}^t + \sum_l h_{il}^t = 1 \qquad \forall i, t$$

- **Verificação das capacidades máximas dos vários tipos de serviço, em todos os períodos**

$$\sum_j z_{kj}^t + \sum_l p_{kl}^t = \sum_i \sum_s x_{iks}^t d_i^t \qquad \forall k, t$$

$$\sum_{\tau=1}^{t}\left(\sum_k z_{kj}^{\tau} + \sum_l q_{lj}^{\tau} + \sum_i y_{ij}^{\tau} d_i^{\tau}\right) \le Q_j \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=\tau}^{T}\left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi}\right) \qquad \forall j, t$$

$$\sum_i x_{iks}^t d_i^t \le Q_s \sum_{\tau=1}^{t}\left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau}\right) \qquad \forall k, s, t$$

- **Coerência entre o transporte de resíduos e os períodos de funcionamento de serviços**

$$x_{iks}^t \le \sum_{\tau=1}^{t}\left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau}\right) \qquad \forall i, k, s, t$$

$$\sum_k p_{kl}^t + \sum_i h_{il}^t d_i^t = \alpha_l \sum_j q_{lj}^t \qquad 0 < \alpha_l < 1, \forall l, t$$

$$y_{ij}^t \le \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=t}^{T}\left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi}\right) \qquad \forall i, j, t$$

- **Capacidade mínima da incineradora**

$$\sum_i h_{il}^t d_i^t + \sum_k p_{kl}^t \ge Q_{\min}^l \sum_{\tau=1}^{t} y_l^{\tau} \qquad \forall l, t$$

$$z_{kj}^t \le Q_s \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=t}^{T}\left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi}\right) \qquad \forall k, j, t$$

- **Número máximo de serviços em cada possível local**

$$\sum_i h_{il}^t d_i^t + \sum_k p_{kl}^t \le Q_{\max}^l \sum_{\tau=1}^{t} y_l^{\tau}$$

ou

$$\sum_i h_{il}^t d_i^t + \sum_k p_{kl}^t \le Q_{\max}^l$$

$$\sum_s \sum_{\tau=1}^{t}\left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau}\right) \le N_{\max}^k \qquad \forall k, t$$

$$q_{lj}^t \le Q_{\max}^l \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=t}^{T}\left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi}\right) \qquad \forall l, j, t$$

- **Coerência entre os diferentes tipos de variáveis de localização**

$$h_{il}^t \le \sum_{\tau=1}^{t} y_l^{\tau} \qquad \forall i, l, t$$

$$y_l^{t-1} \le y_l^t \qquad \forall l, t > 1$$

$$r_{jt}^{\xi} \le \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=\tau}^{T} a_{j\tau}^{\xi}$$

$$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{\xi=\tau}^{T}\left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi}\right) \le 1 \qquad \forall j, t$$

$$r_{kst} \le \sum_{\tau=1}^{t} a_{ks\tau} \qquad \forall k, s, t$$

- **Domínio de variação das variáveis**

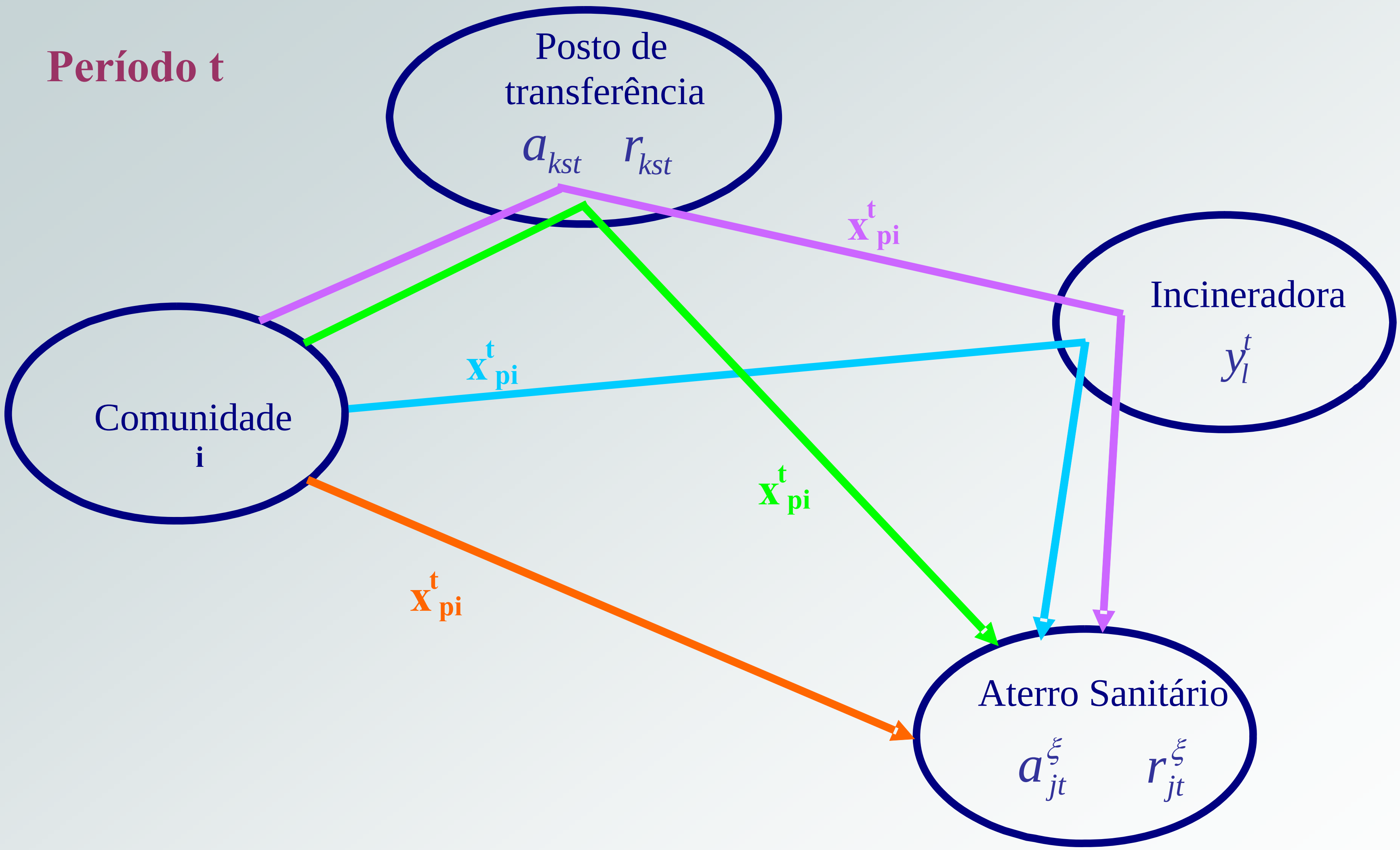
$$a_{jt}^{\xi}, r_{jt}^{\xi}, a_{kst}, r_{kst}, y_l^t \in \{0,1\} \qquad \forall j, k, s, l, t, \xi \ge t$$

$$0 \le x_{iks}^t, y_{ij}^t, h_{il}^t \le 1$$

$$z_{kj}^t, p_{kl}^t, q_{lj}^t \ge 0 \qquad \forall j, k, l, t$$

Modelo 2

Período t



Restrições (Modelo 2)

- Em cada período ***t*** a totalidade dos resíduos provenientes da localidade ***i*** tem de ser afectada a um ou mais caminhos ***p***

$$\sum_{p} x_{pi}^{t} = 1 \qquad \forall i, t$$

- Os resíduos só poderão ser afectados a um caminho ***p*** no período ***t*** se todos os serviços que constituem esse caminho estiverem abertos no período ***t***

$$x_{pi}^{t} \le \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{\xi=\tau}^{T} \left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi} \right) \qquad \forall i, t, p \in P(j)$$

$$x_{pi}^{t} \le \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{s} \left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau} \right) \qquad \forall i, t, p \in P(k,s)$$

$$x_{pi}^{t} \le \sum_{\tau=1}^{t} y_{l}^{\tau} \qquad \forall i, t, p \in P(l)$$

- A totalidade dos resíduos transportados para o aterro localizado em ***j*** não pode exceder a sua capacidade em nenhum dos períodos ***t***

$$Q_j \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{\xi=\tau}^{T} \left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi} \right) \ge \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i} \sum_{p \in P(j)} d_i^{\tau} x_{pi}^{\tau} \theta_p \qquad \forall j, t$$

- A totalidade dos resíduos transportados para os módulos de dimensão ***s*** do posto de transferência localizado em ***k*** não pode exceder a sua capacidade máxima, em nenhum dos períodos temporais ***t***

$$\sum_{i} \sum_{p \in P(k,s)} d_i^{t} x_{pi}^{t} \le Q_s \sum_{\tau=1}^{t} \left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau} \right) \qquad \forall k, s, t$$

- Verificação das capacidades mínimas e máximas de funcionamento da incineradora localizada em ***l*** em cada período temporal ***t***

$$Q_{\min}^{l} \sum_{\tau=1}^{t} y_l^{\tau} \le \sum_{i} \sum_{p \in P(l)} d_i^{t} x_{pi}^{t} \le Q_{\max}^{l} \sum_{\tau=1}^{t} y_l^{\tau} \qquad \forall l, t$$

- Número máximo de serviços em cada local

$$r_{kst} \le N_{\max} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{s} a_{ks\tau} \qquad \forall k, s, t$$

$$\sum_{\tau=1}^{T} \sum_{s} \left(a_{ks\tau} + r_{ks\tau} \right) \le N_{\max}^{k} \qquad \forall k$$

- Coerência entre os diferentes tipos de variáveis de localização

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{\xi=t}^{T} a_{jt}^{\xi} \le 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_{\tau=1}^{t-1} \sum_{\xi=\tau}^{t-1} a_{j\tau}^{\xi} \le \sum_{\xi=t}^{T} r_{jt}^{\xi} \qquad \forall j, t \ge 2$$

$$\sum_{s} a_{kst} \le 1 \qquad \forall k, t$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_l^{t} \le 1 \qquad \forall l$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{\xi=t}^{T} \left(a_{j\tau}^{\xi} + r_{j\tau}^{\xi} \right) \le 1 \qquad \forall j, t$$

- Domínio de variação das variáveis

$$a_{jt}^{\xi}, r_{jt}^{\xi}, a_{kst}, y_l^{t} \in \{0,1\} \qquad \forall j, k, s, l, t, \xi \ge t$$

$$0 \le x_{pi}^{t} \le 1 \qquad \forall i, p, t$$

$$r_{kst} \in Z_0^{+} \qquad \forall k, s, t$$

Qualquer dos dois modelos é suficientemente complexo para não ser possível tratá-lo directamente.

É possível relaxar algumas restrições de forma a identificar os vários subproblemas envolvidos.

Os subproblemas são, em geral, da classe *NP-Difícil* (Dias *et al*., 2002 2004[a], 2004[b], 2004[c], 2005[a]).

Já desenvolvemos heurísticas de tipo primal-dual (muito eficientes nalguns casos) e fizemos a sua inclusão num procedimento de pesquisa em árvore (num caso).

Desenvolvemos também uma heurística memética (genético+pesquisa local) para problemas de localização dinâmica com e sem restrições de capacidade, só com um nível ou com vários níveis (Dias *et al*., 2005[b]).

Como já vimos, neste problema devem ser considerados **vários objectivos**, conflituosos entre si, e não apenas a minimização dos custos totais.

A introdução de mais objectivos, associados nomeadamente:

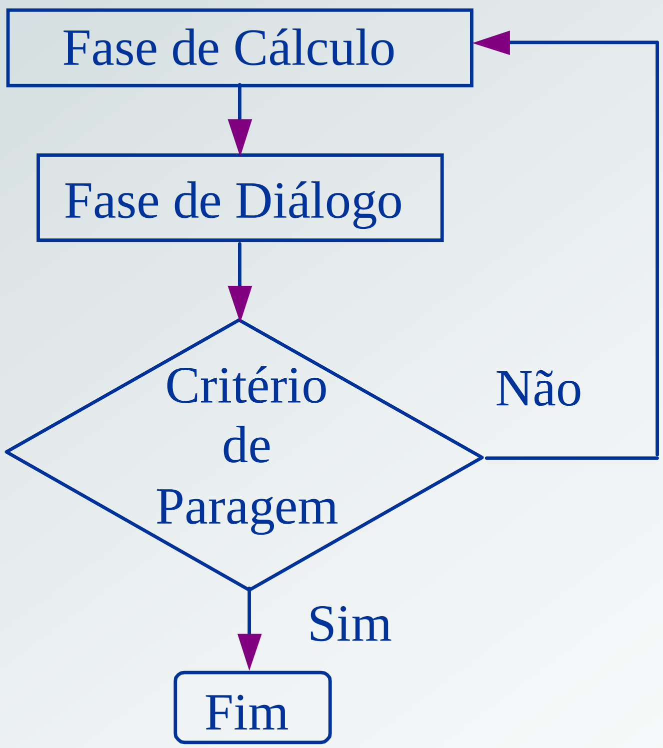
- à **minimização do risco,** e
- à **maximização da equidade**

levará a um modelo mais difícil de tratar do que os anteriores.

É necessário enveredar pela utilização de **heurísticas** para a obtenção de boas soluções admissíveis.

Fizemos uma adaptação do **algoritmo memético (genético+pesquisa local)**, que se revelou eficaz mas pouco eficiente (demora muito tempo mas obtém bons resultados).

Para estudar os modelos bicritério foi utilizado um sistema de apoio à decisão (Ferreira *et al.*, 1996), baseado no procedimento interactivo apresentado em Ferreira, Clímaco e Paixão (1994).



Características do ambiente interactivo desenvolvido:

i. não existem decisões irrevogáveis durante o processo;

ii. o utilizador pode indicar uma **sub-região para continuar a pesquisa** de soluções não-dominadas de **forma muito simples**:

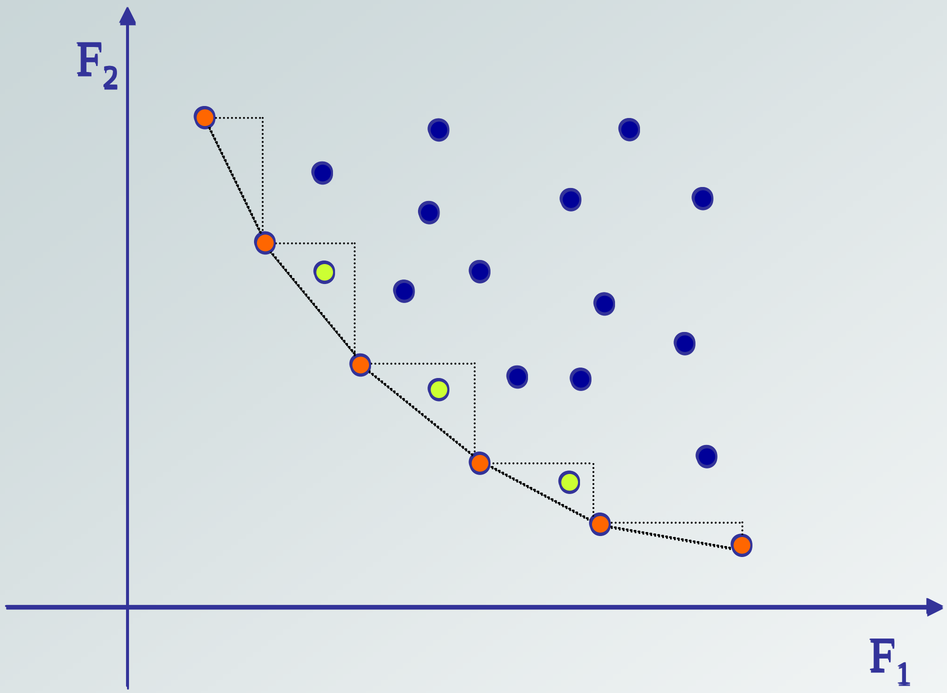
- escolhendo um par de soluções não-dominadas candidatas a serem adjacentes (pelo índice das soluções),
- indicando limites superiores nos valores F_1 e F_2;

iii. qualquer solução não-dominada do problema pode ser encontrada:

- as soluções **não-dominadas suportadas** (na fronteira do envolvente convexo),
- as soluções **não-dominadas não-suportadas** (nos *gaps* de dualidade);

iv. pelo lado operacional, um **problema programação linear inteira mista mono-critério** (cuja estrutura permanece quase inalterada, com as correspondentes vantagens computacionais) tem que ser resolvido em cada passo.

Em problemas discretos, a optimização de somas ponderadas das diferentes funções objectivo só gera parte do conjunto das soluções não-dominadas.



$$\begin{aligned} &\min \quad F_1(x) \\ &\min \quad F_2(x) \\ &s.a: \quad x \in X \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\min\ \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) \\ &s.\ a: \quad F_1(x) \le \alpha_1 \\ &\qquad\quad F_2(x) \le \alpha_2 \\ &\qquad\quad x \in X \end{aligned}$$

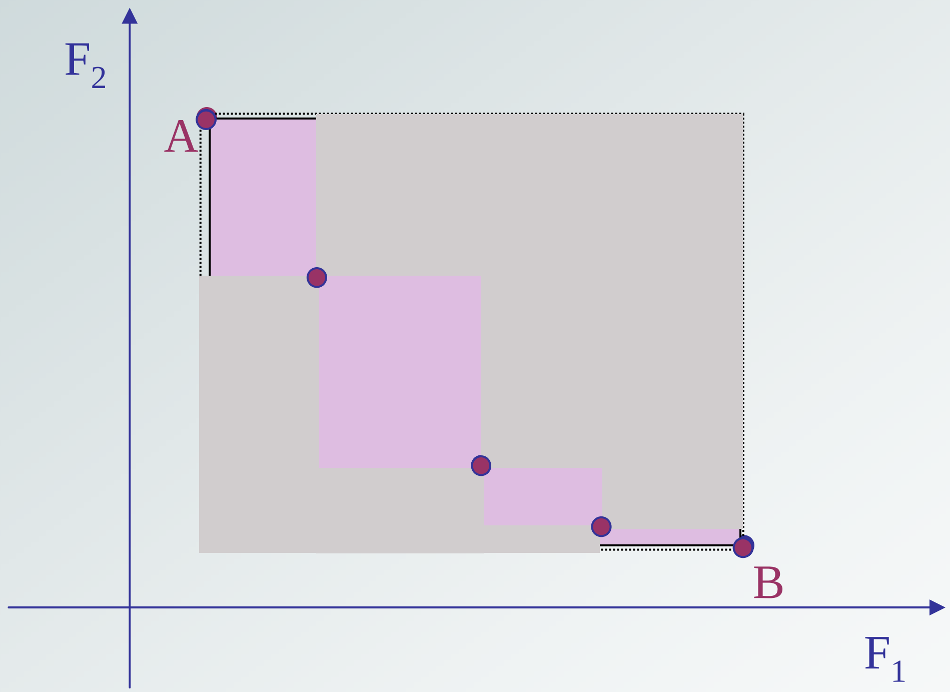
$(\lambda_1, \lambda_2): \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

para diferentes valores de (α_1, α_2)

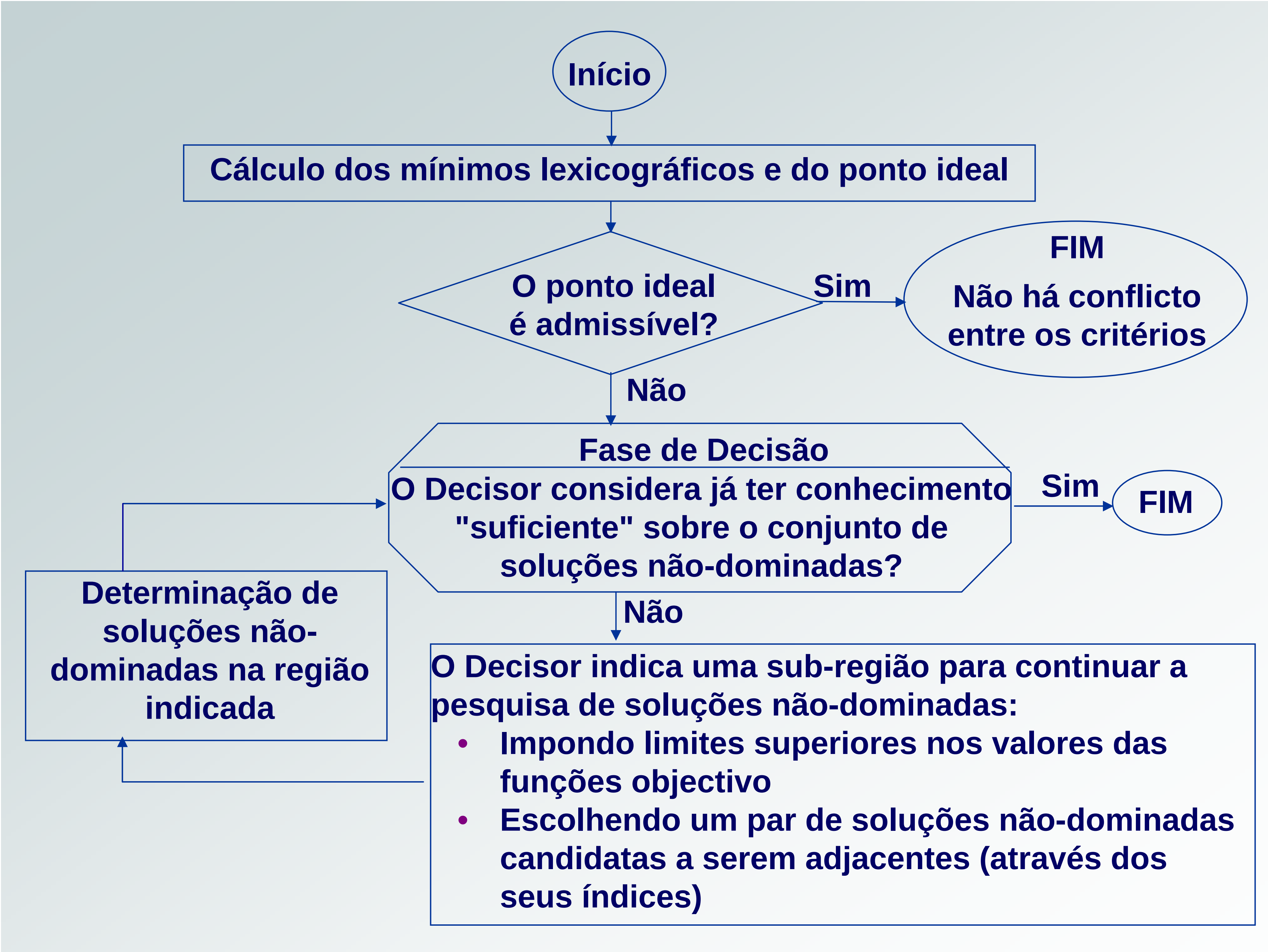
A escolha dos pesos (λ_1, λ_2) a utilizar não é muito importante.

Podemos utilizar qualquer conjunto de pesos desde que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

O decisor pode indicar uma sub-região para pesquisa de soluções não-dominadas, escolhendo um par de soluções não-dominadas para pesquisar a área rectangular entre elas no espaço dos objectivos.



Conhecendo as regiões já exploradas, o decisor procura as soluções não-dominadas de uma forma selectiva, evitando regiões onde elas não existem, e melhorando o seu conhecimento sobre o conjunto de soluções não-dominadas de uma forma progressiva.


Início
Cálculo dos mínimos lexicográficos e do ponto ideal
O ponto ideal é admissível?
Sim
FIM
Não há conflicto entre os critérios
Não
Fase de Decisão
O Decisor considera já ter conhecimento "suficiente" sobre o conjunto de soluções não-dominadas?
Sim
FIM
Não
O Decisor indica uma sub-região para continuar a pesquisa de soluções não-dominadas:
• Impondo limites superiores nos valores das funções objectivo
• Escolhendo um par de soluções não-dominadas candidatas a serem adjacentes (através dos seus índices)
Determinação de soluções não-dominadas na região indicada

Um Sistema de Apoio à Decisão para o caso bicritério foi já desenvolvido (Fernandes, Captivo & Clímaco, 2005).

Foi construído de forma modular, começando com o caso da Localização Simples Bicritério, mas sendo fácil introduzir novos modelos ou novos algoritmos para a resolução dos subproblemas.

Este tipo de ferramentas gráficas parece apropriado para **procurar compromissos** em situações onde a **decisão em grupo** deve ter lugar, eventualmente na presença de relações hierárquicas, facilitando a **negociação** entre as diferentes partes.

Um *general solver* (**CPLEX, MatLab**) pode ser utilizado para resolver os problemas mono-critério em cada interacção.

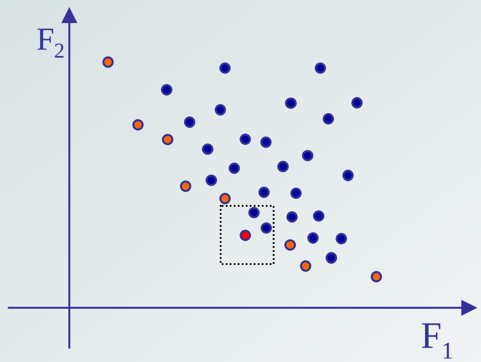
Em muitos casos, existem algoritmos específicos, tirando partido da estrutura particular do problema.

Em termos de eficiência computacional, estes algoritmos funcionam muito melhor que algoritmos gerais.

A versão actual do sistema ainda não inclui qualquer análise *a posteriori*, mas ela pode ser facilmente incorporada.

Se o decisor pretender conhecer outras soluções admissíveis (caso existam), dominadas ou não, próximas (em termos do valor das funções objectivo) da solução não-dominada preferida

$$F' = (F_1', \; F_2')$$



o problema a resolver é novamente um problema paramétrico com restrições impondo limites superiores e inferiores nos valores das duas funções objectivo.

A única diferença é que, em vez de duas restrições adicionais do tipo

$$F_1(x) \le \alpha_1$$

$$F_2(x) \le \alpha_2$$

são necessárias quatro restrições

$$F_1(x) \le \alpha_1 + \delta$$
$$F_2(x) \le \alpha_2 + \delta$$
$$F_1(x) \ge \alpha_1 - \delta$$
$$F_2(x) \ge \alpha_2 - \delta$$

O novo procedimento é eficiente e pode ser incluído no SAD.