Problemas de Computabilidade em Equações Diferenciais

Daniel Graça

DM/FCT, Universidade do Algarve
&
SQIG - Instituto de Telecomunicações

5 de Maio de 2007

Esquema da apresentação

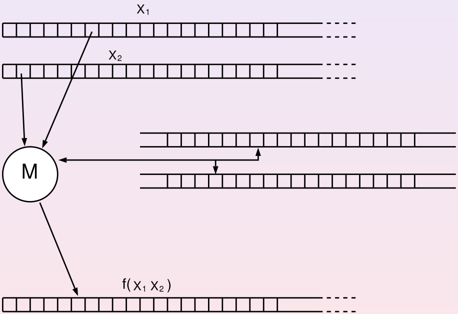
Algoritmos

Desde os primórdios da matemática que se conhecem algoritmos:

- O algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum de dois números
- O crivo de Erastótenes, utilizado para encontrar todos os números primos até um determinado limite
- ...

No entanto, não existe nenhuma definição formal de algoritmo que seja consensual. Em vez de se preocuparem com a noção de algoritmo, a maioria dos investigadores utiliza a chamada Tese de Church-Turing.

Tese de Church-Turing: Tudo o que pode ser calculado por meio de algoritmos, pode ser calculado por máquinas de Turing (MT) e vice-versa



Inputs/Outputs

Cada input/output está codificado numa fita, em notação binária

Funcionamento

A máquina admite várias fitas de trabalho e um número finito de estados

Utilizando MTs, estamos a trabalhar com um objecto matemático concreto e podemos obter resultados sobre as suas propriedades. Existem duas grandes áreas de estudo:

- **Computabilidade:** Pretende-se determinar quando é que um problema é ou não decidível, i. e. pretende-se determinar se um dado problema pode ser resolvido através de uma MT.

  Existem problemas cuja solução se sabe não ser decidível:
  - Problema da Paragem
  - 10º Problema de Hilbert
  - ...

- **Complexidade Computacional**: Para problemas decidíveis, pretende-se classifica-los de acordo com a quantidade de recursos necessários para a sua resolução.

Desta forma podemos definir um conceito de computação sobre quantidades discretas.

No entanto, é também interessante saber computar com quantidades contínuas uma vez que:

- A maioria dos modelos físicos utiliza quantidades contínuas e assim poderemos tentar saber se é possível construir computadores mais potentes se não nos restringirmos ao uso da tecnologia digital
- Uma parte substancial da matemática recorre aos números reais. Logo é natural obter noções de computação sobre esta estrutura

Contrariamente ao caso da computação discreta, não existe uma Tese de Church-Turing para computação sobre os reais. Existem diversas teorias que dão origem a diferentes noções de computação.

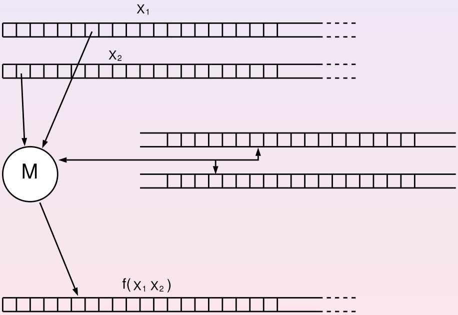
Uma teoria de computação sobre os reais que tem ganho algum relevo é a Análise Computável. Em particular:

- Extende de forma natural a Teoria Clássica da Computação
- É uma teoria relativamente robusta
- Pode ser aplicada a estruturas topológicas satisfazendo algumas propriedades básicas
- Existe já um conjunto significativo de resultados sobre Análise Computável

Esta teoria é relativamente antiga, surgindo os seus fundamentos no artigo seminal de Alan Turing, onde é introduzido a noção de Máquina de Turing e provada a indecibilidade do Problema da Paragem

Análise Computável: máquinas de tipo-2

Seja $\nu_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a representação dos números racionais definida por $\nu_{\mathbb{Q}}(\langle p, q, r \rangle) \mapsto (-1)^p \frac{q}{r+1}$



Uma fita representa um número real:

Dada uma sucessão (x_n) de inteiros, escrevemos $(x_n) \rightsquigarrow x$ sse $\forall i, |x - \nu_{\mathbb{Q}}(x_i)| < \frac{1}{2^i}$

M funciona como uma máquina de Turing

Mas só pode ler o input, e não pode voltar atrás para emendar o output parcial

Algumas definições:

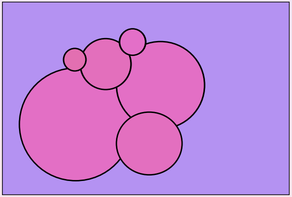
- Uma sucessão $\{r_n\}$ de números racionais é chamada de ρ-nome de um número real x se existem três funções a, b, c de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ tais que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $r_n = (-1)^{a(n)} \frac{b(n)}{c(n)+1}$ e
$$|r_n - x| \leq \frac{1}{2^n}$$
- Um número real x diz-se computável se a, b, c são funções computáveis. Exemplos: $2, \frac{3}{10}, \pi, e$
- Uma sucessão $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais é computável se existem três funções computáveis a, b, c de $\mathbb{N}^2$ para $\mathbb{N}$ tais que, para todos os $k, n \in \mathbb{N}$,
$$\left|(-1)^{a(k,n)} \frac{b(k,n)}{c(k,n)+1} - x_k\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Exemplo: $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n \cdot \pi, \ldots$

- Um conjunto aberto $E \subseteq \mathbb{R}^m$ é dito recursivamente enumerável (r.e.) se existem sucessões computáveis $\{a_n\}$ e $\{r_n\}$, $a_n \in E$ e $r_n \in \mathbb{Q}$ tais que

$$E = \cup_{n=0}^{\infty} B(a_n, r_n)$$

e para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B(a_n, r_n)} \subseteq E$



Exemplos: $\mathbb{R}^m, (0,1), S^2$, o complemento do conjunto de Mandelbrot

- Um conjunto fechado $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é dito recursivamente enumerável (r.e.) se existir uma sequência computável $\{s_n\}$, tal que $\{s_n\}$ é denso em K.
  Exemplos: $\mathbb{R}^m, [0,1], \overline{S^2}$
- Um conjunto aberto/fechado $E \subseteq \mathbb{R}^l$ é computável (ou recursivo) se E e $\overline{E}$ são ambos r.e.
  Exemplos: $\mathbb{R}^m, [0,1], S^2$

Em particular, um intervalo aberto $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ ou um intervalo fechado $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ é computável sse α e β são números reais computáveis.

Uma função contínua $f : E \to \mathbb{R}^m$ é computável se existe uma máquina de tipo-2 que traduz cada ρ-nome de $x \in E$ para um ρ-nome de $f(x)$.

Exemplos de funções computáveis:

- Operações aritméticas: $+, -, \times, \div$
- Funções trigonométricas: $sin, cos, tan, \ldots$
- Funções correntes da Análise: exponencial, potências, logaritmos, etc.

Existe já um número significativo de temas abordados pela Análise Computável:

- Derivação: $f \in C^2$ é computável em $[a, b] \Rightarrow f'$ é computável em $[a, b]$
- Integração: se f é computável num intervalo computável $[a, b]$, então $\int_a^x f(u)du$ é computável em $[a, b]$.
- Continuação analítica: se f é analítica numa região $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e computável num rectângulo computável $D \subseteq \Omega$, então f é computável em qualquer compacto $K \subseteq \Omega$. Além do mais, a sequência de coeficientes de Taylor para a expansão em redor de $a \in \Omega$ é computável
- Todos os zeros isolados de uma função computável são computáveis

Aqui iremos abordar o tópico das equações diferenciais (EDs) do ponto de vista da Análise Computável. Em particular, iremos interessar-nos pelos seguintes temas:

- Teoria de existência e unicidade de EDs Ordinárias (EDOs)
- Resultados de não-computabilidade
- Problemas de decisão em sistemas dinâmicos contínuos

Motivação

Existem alguns resultados relativos a Problemas de Valor Initial (PVIs) definidos com equações diferenciais que sugerem que estas podem ter um poder computacional para além da Análise Computável:

- (Pour-El, Richards) Existe uma equação diferencial ordinária, definida com dados computáveis, que não tem uma solução computável
- (Pour-El, Richards, Zhong) Existe uma equação de onda tridimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

  com as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= f(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) &= 0 \end{aligned}$$

  onde f é computável, mas cuja única solução não é computável

Estes exemplos têm de alguma forma incomodado matemáticos e físicos, uma vez que uma parte significativa destas comunidades aceita a seguinte versão física da Tese de Church-Turing: nenhum dispositivo físico que possa ser construído terá mais poder que uma máquina de Turing

Na realidade, os resultados anteriores parecem necessitar de dados que não são "bem-comportados":

- O primeiro resultado deixa de ser válido se exigirmos que a equação tenha uma única solução
- O segundo resultado deixa de ser válido se exigirmos que a solução seja de classe C^1: se a velocidade inicial é C^k-computável e a posição inicial é C^{k-1}-computável, então a solução é C^{k-1}-computável

Os seguintes resultados são conhecidos já há algum tempo:

- Se f é computável num compacto computável Ω, e existe uma única solução de $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0 \in int(\Omega)$ para $t \in [0, b]$, então essa solução é computável em $[0, b]$ (Ko, 91)
- No entanto, a computabilidade da solução perde-se se não exigirmos a unicidade da solução: existe uma função $f : [0, 1] \times [-1, 1]$, computável em tempo polinomial, tal que a solução de $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$ não tem nenhuma solução computável em $[0, \delta]$, para todo o $\delta > 0$ (Pour-El & Richards, 1979)
- Seja a um número computável arbitrário entre 0 e 1. Então existe uma função $f : [0, 1] \times [-1, 1]$, computável em tempo polinomial, tal que a solução $x(t)$ de $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$ satisfaz $x(t) = at^2$ (Miller, 1970)

Os resultados que envolvem a passagem da solução para um grau superior de computabilidade/complexidade parecem requerer a ausência de uma condição de Lipschitz

Definição

A função f *satisfaz uma condição de Lipschitz em* $[0,1]\times\Omega$ *se existe uma constante* L *tal que para todos os* $t\in[0,1]$ *e* $x_1,x_2\in\Omega$

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L\cdot|z_1-z_2|$$

- Se f é computável e satisfaz uma condição de Lipschitz, então a solução de $x'=f(t,x)$, $x(0)=x_0\in\Omega$ é computável
- Se f é computável em tempo polinomial e satisfaz uma condição de Lipschitz, então a solução de $x'=f(t,x)$, $x(0)=x_0\in\Omega$ é computável em tempo polinomial (ver, por exemplo, Henrici, 1962)

De alguma forma, os resultados anteriores sugerem que a existência de soluções não-computáveis para PVIs definidos por equações diferenciais tem mais a ver com a falta de regularidade das EDs do que com a criação de propriedades "super-computáveis". Fenómenos idênticos podem ser encontrados noutros temas de Análise Computável:

- Existe uma função computável em tempo polinomial em $[0, 1]$, que admite um número infinito de máximos em $[0, 1]$, sendo que nenhum deles é computável (se o número de máximos fosse finito, todos eles teriam de ser computáveis)
- Existe um operador computável que admite um valor próprio não-computável (esse valor próprio é computável se o operador é auto-adjunto ou normal)
- $\ldots$

Portanto vamos restringir-nos a casos "bem comportados".

De particular interesse para nós será o estudo do intervalo maximal:

Teorema (Intervalo Maximal)

Seja f uma função contínua e localmente Lipschitz na segunda variável, num domínio $E \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$. Para todo o $(t_0, x_0) \in E$, o PVI anterior tem uma única solução x, definida num intervalo maximal (α, β) com a seguinte propriedade: se $\beta < \infty$ ($\alpha > -\infty$), então $(t, x(t))$ aproxima-se da fronteira de E, ou então $\|x(t)\|$ é ilimitado quando $t \to \beta^-$ ($t \to \alpha^+$, respectivamente).

O problema

Questão. Se f e (t_0, x_0) são computáveis, será que o PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem um intervalo maximal computável? E será que a respectiva solução é computável nesse intervalo?

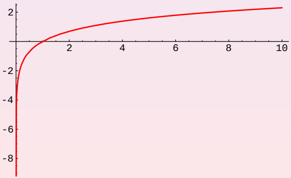


Gráfico da solução

do PVI $x' = \frac{1}{x}$, onde $x(1) = 0$. O intervalo maximal é $(0, +\infty)$ [a solução é $\ln$]

Análise Numérica

Será que os métodos da Análise Numérica existentes resolvem à partida o nosso problema?

Não, porque:

- As soluções são calculadas para um *intervalo compacto* $[t_0, t_1]$ (devido à necessidade de garantir a existência de uma constante de Lipschitz)
- O intervalo $[t_0, t_1]$ é dado *a priori*

Computabilidade no intervalo maximal

Definição

Seja $E = \cup B(a_n, r_n)$ *um conjunto aberto r.e. Uma função* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *é efectivamente localmente Lipschitz na segunda variável se existe uma sucessão computável* $\{K_n\}$ *de inteiros positivos tais que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K_n |y - x|$$

para todos os $(t,x),(t,y) \in \overline{B(a_n, r_n)}$

Computabilidade no intervalo maximal

Teorema (Graça, Zhong, Buescu)

Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ *um conjunto aberto r.e. e seja* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função computável que é também efectivamente localmente Lipschitz na segunda variável. Seja* (α, β) *o intervalo maximal de existência da solução do PVI anterior, onde* (t_0, x_0) *é um ponto computável em* E*. Então* $x(t)$ *é uma função computável em* (α, β)*.*

Demonstração (ideia)

Para cada bola $\overline{B(a_n, r_n)}$, calcular

- $M_n = \max_{x \in \overline{B(a_n, r_n)}} \|f(x)\|$
- $K_n = \max_{x \in \overline{B(a_n, r_n)}} \|f'(x)\|$

Agora podemos determinar um índice n_0 tal que $x_0 \in B(a_{n_0}, r_{n_0})$. Utilizando a informação local sobre $\overline{B(a_{n_0}, r_{n_0})}$, obtemos um intervalo de tempo $[0, t_0]$ onde a solução está definida (utilizar, por exemplo, o método das aproximações de Picard). Em particular, concluímos que $x_1 = x(t_0)$ é computável.

Agora podemos aplicar o seguinte algoritmo de forma iterativa:

1. $n = 0$
2. Determinar um índice k_n tal que $x_n \in \overline{B(a_{k_n}, r_{k_n})}$
3. Determinar um intervalo de tempo $[t_{n-1}, t_n]$ onde a solução está definida
4. Tomar $x_{n+1} = x(t_n)$ e incrementar n
5. Voltar ao passo 2

É possível mostrar (demonstração complicada) que o intervalo maximal é dado por

$$(0, \beta) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (0, t_n)$$

A solução x é computável porque, dado $t \in [0, \beta)$, podemos:

- determinar um índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \leq t_n$
- calcular numericamente a solução em $[0, t_n]$

e logo calcular o valor de $x(t)$. Isto mostra que x é computável sobre o intervalo maximal (α, β).

Não-computabilidade

Teorema (Graça, Zhong e Buescu)

Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, computável e analítica, tal que a solução do PVI

$$x' = f(x), \; x(0) = 0$$

está definida num intervalo maximal que não é computável.

Por outro lado, há também o seguinte resultado que estabelece o grau de "não-computabilidade" do intervalo maximal de um PVI:

Teorema (Graça, Zhong e Buescu)

Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ um conjunto aberto r.e. e seja $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função computável que é também efectivamente localmente Lipschitz na segunda variável. Seja (α, β) o intervalo maximal de existência da solução do PVI anterior, onde (t_0, x_0) é um ponto computável em E. Então (α, β) é um intervalo aberto e r.e.

Os resultados anteriores, que nos dizem que (α, β) é um intervalo r.e. mas não computável (nas condições dadas), podem ser vistos da seguinte forma:

- É possível calcular uma sucessão $\{b_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ através de um algoritmo, a partir de f e (t_0, x_0), que converge para β (parte positiva)
- No entanto, não existe nenhum algoritmo em que, dado um b_n como input, nos diga a que distância está de β (parte negativa)

Demonstração da não-computabilidade

Lema

Seja $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma função recursiva bijectiva cuja imagem é um conjunto r.e. não recursivo. Então existe uma função analítica* φ *com as seguintes propriedades:*

1. φ *está definida em* $(-\alpha, \alpha)$, *onde* $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a(i)}$ *é um real não-computável;*
2. $\varphi(x) \to \pm\infty$ *quando* $x \to \pm\alpha^{\mp}$*;*
3. $\varphi : (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$ *é ímpar e bijectiva.*

A prova baseia-se no seguinte facto: é sabido (Pour-El, Richards) que se $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função recursiva bijectiva cuja imagem é um conjunto r.e. não-recursivo A, então $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a(i)}$ é um número real não-computável. Logo, o intervalo $(-\alpha, \alpha)$ não é recursivo.

Prova do Lema: Seja φ definida por

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_n = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-a(i)}\right)^{-n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

O raio de convergência desta função é dado por

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a(i)} = \alpha.$$

Temos ainda $a_{2n+1} > 1/\alpha^{2n+1}$, que implica

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} > \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2n+1}.$$

Logo, $\varphi(x) \to +\infty$ quando $x \to \alpha^-$.

Como φ é ímpar por construção, concluímos que $\varphi(x) \to -\infty$ quando $x \to -\alpha^+$. Note-se também que

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n \tag{1}$$

e logo $\varphi'(x) > 0$ para todo o $x \in (-\alpha, \alpha)$ (todos os coeficientes $(n+1)\, a_{n+1}$ são não-negativos, e só as potências pares têm coeficientes não-nulos).

Isto implica que φ é injectiva, e logo bijectiva pela condição 2 do enunciado do lema. De (1) e da escolha de a_n segue que φ' é estritamente crescente em $[0, \alpha)$, e como φ' é par, decrescente em $(-\alpha, 0]$.

Falta mostrar que φ é computável. Sem perda de generalidade, iremos supor que $x \geq 0$. Como $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é computável por hipótese, existe uma MT que, para todo o input $k \in \mathbb{N}$ (precisão de saída) e todo o $x \in (-\alpha, \alpha)$ com $x \geq 0$, calcula primeiro um racional $\varepsilon > 0$ satisfazendo $0 \leq x < \alpha - \varepsilon$, e depois um valor $n(k) \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\sum_{i=0}^{n(k)} 2^{-a(i)} > x + \varepsilon$ e $\left(\frac{x}{x+\varepsilon(x)}\right)^{n(k)} \frac{(x+\varepsilon(x))^2}{(x+\varepsilon(x))^2 - x^2} < 2^{-k-1}$.

Observe-se que

$$\left|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n(k)} a_i x^i\right| = \sum_{i=n(k)+1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=\left\lceil \frac{n(k)}{2} \right\rceil}^{\infty} \left(\frac{x}{\sum_{j=0}^{2i+1} 2^{-a(j)}}\right)^{2i+1}$$

$$\leq \sum_{i=\left\lceil \frac{n(k)}{2} \right\rceil}^{\infty} \left(\frac{x}{x+\varepsilon(x)}\right)^{2i+1} \leq \left(\frac{x}{x+\varepsilon(x)}\right)^{n(k)} \frac{(x+\varepsilon(x))^2}{(x+\varepsilon(x))^2 - x^2} \leq 2^{-k-1}.$$

Então, se a nossa MT calcular um r_k satisfazendo

$$\left|r_k - \sum_{i=0}^{n(k)} a_i x^i\right| \leq 2^{-k-1}$$

concluímos que $|r_k - \varphi(x)| \leq 2^{-k}$. Logo φ é computável.

Podemos construir explicitamente a função f se deixarmos cair o requerimento de analiticidade (i.e. pedimos apenas que f seja computável, e logo contínua, e efectivamente Lipschitz).

Iremos utilizar novamente o seguinte resultado: se $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função recursiva bijectiva cuja imagem é um conjunto r.e. não recursivo A, então $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a(i)}$ é um número real não-computável

Ideia da demonstração

A ideia é a seguinte: f é construída por pedaços em intervalos do tipo $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{N}$ (para valores negativos, tomar $f(x) = f(|x|)$) tal que a solução do PVI

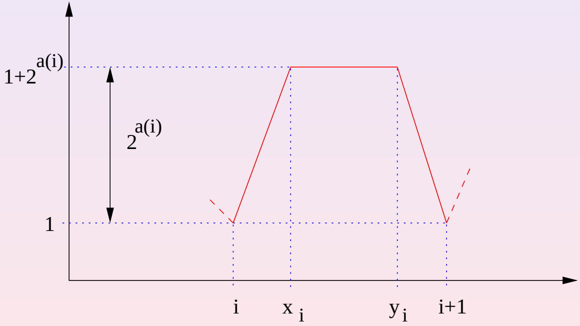
$$x' = f(x), \; x(0) = i$$

satisfaça $x(2^{-a(i)}) = i + 1$, o que implica que a solução do problema $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ satisfaça $x(2^{-a(0)}) = 1$, $x(2^{-a(0)} + 2^{-a(1)}) = 2$, ..., ou mais geralmente

$$x\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-a(i)}\right) = n + 1, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(Note-se que f não depende de t e portanto a solução é invariante sob translações no tempo). Se tomarmos $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-a(i)}$, então $x(t) \to \infty$ quando $t \to \alpha^-$ e portanto o intervalo maximal tem de ser $(-\alpha, \alpha)$.

Iremos agora construir a função f nos intervalos da forma $[i, i+1]$, $i \in \mathbb{N}$. Como uma função computável deve ser contínua, precisamos de juntar os valores de f nas extermidades desses intervalos. Isso é conseguido assumindo que $f(i) = 1$, para $i \in \mathbb{N}$



Portanto f pode ser definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1+2^{a(i)}\frac{x-i}{x_i-i} & \text{se } x\in[i,x_i) \\ 1+2^{a(i)} & \text{if } x\in[x_i,y_i), \\ 1+2^{a(i)}-2^{a(i)}\frac{x-y_i}{i+1-y_i} & \text{se } x\in[y_i,i+1), \end{cases}$$

onde

$$x_i=i+\frac{1-\Delta_i}{2}, \qquad y_i=i+\frac{1+\Delta_i}{2},$$

e

$$0<\Delta_i=\frac{1-\ln(2^{a(i)}+1)}{1-(1+2^{a(i)})^{-1}-\ln(1+2^{a(i)})}<1.$$

(Suposemos que $a(i)\geq 1$. Se $a(i)\geq 0$, então considere a função $b:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $b(i)=a(i)+1$ e utilize a substituição de variável $\tilde{t}=t/2$ na EDO correspondente)

Outros resultados

Teorema (Graça, Zhong e Buescu)

Dado um PVI da forma anterior, com intervalo maximal (α, β), *onde* f *é analítica,* f e (t_0, x_0) *são computáveis, não existe nenhum algoritmo que permita determinar se* $\beta < \infty$ *ou* $\beta = \infty$.

Teorema (Graça, Zhong e Buescu)

Dado um PVI da forma anterior, com intervalo maximal (α, β), *onde* f *é um polinómio,* f e (t_0, x_0) *são computáveis, não existe nenhum algoritmo que permita determinar se* $\beta < \infty$ *ou* $\beta = \infty$.

Ideia da prova do 1º resultado

- Considere-se o PVI $x' = f(t, x)$, onde $x(t_0) = x_0$
- Suponhamos que existe uma MT que, com input $\langle f, t_0, x_0 \rangle$, dá 1 como resultado se $\beta < \infty$, e 0 caso contrário
- Considere-se o seguinte problema indecidível: "Seja $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ a função gerada por uma MT universal. Então, dado $i \in \mathbb{N}$, decida se o valor $\psi(i, i)$ está definido". Seja M_1 uma MT que calcula ψ
- Seja $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ a função recursiva definida por

$$g(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_1 \text{ pára com input } (i,i) \text{ em } \leq j \text{ passos} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tem-se

$$\psi(i,i) \text{ está definida} \quad \text{sse} \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \quad (\forall j \geq j_0, \; g(i,j) = 0)$$

- Considere-se a sucessão computável de funções analíticas $\{\varphi_i\}$, onde $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,2n} x^{2n}, \quad \text{onde } a_{i,n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n} g(i,n).$$

- Note que o raio de convergência de φ_i é $+\infty$ sse $\psi(i,i)$ está definida
- Então, utilizando a nossa hipótese, existe uma MT M_2 que, tendo por input i, nos dá 1 se o intervalo maximal do PVI $x' = \varphi_i'(t)$, com $x(0) = 0$ é limitado, e 0 caso contrário
- Mas então, como

$$M_2 \text{ com o input } i \text{ retorna } \begin{cases} 0 & \text{se } \psi(i,i) \text{ está definida} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

M_2 decide um problema indecídivel, o que é absurdo

Muitos dos problemas que mencionamos anteriormente têm aplicação na Teoria de Controlo.

A ideia é tentar obter um dispositivo "tão automático quanto possível", que tome por input a descrição de um sistema, e que nos diga se o sistema satisfaz determinada propriedade (por exemplo, que um reactor não sai do seu regime normal de funcionamento, que uma determinada rede não irá colapsar, etc.).

Até agora apenas se têm estudado sistemas muito simples, e esperamos que o nosso trabalho possa contribuir no esclarecimentos destas questões.

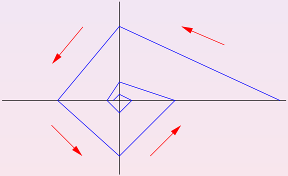
Exemplo (Atingibilidade): Dado um conjunto de pontos A, é possível que alguma trajectória com ínicio em A atinja o conjunto B (conjunto dos estados inválidos)?

Em geral, este problema costuma ser simplificado para $B = \{0\}$.

A maioria dos resultados diz que estes problemas são indecidíveis. No entanto, os resultados são válidos para classes de sistemas pouco naturais do ponto de vista físico.

Esta é uma razão para estudar EDOs analíticas, que já são mais realistas.

Exemplo (Sistemas PCD): Um sistema PCD é um sistema dinâmico contínuo definido num poliedro limitado X. As suas trajectórias são definidas por uma equação $x' = f(x)$. O conjunto X pode ser separado em poliedros racionais tais que f toma um valor constante em cada um desses conjuntos.



Computation by a PCD

Cada expressão binária é codificada num elemento de $\mathbb{R}^d$. Se a trajectória começando nesse ponto atinge a origem num espaço finito de tempo, então a expressão é aceite.

A utilização do *Paradoxo de Zeno* permite que os PCDs tenham um poder super-Turing:

- Asarin e Maler mostraram que todo o conjunto da hierarquia aritmética pode ser reconhecido por um sistema PCD
- Mais tarde, Bournez generalizou este resultado e mostrou que as linguagens reconhecidas por um sistema PCD de dimensão $d = 2k + 3$ (resp. $d = 2k + 4$), $k \geq 0$ são precisamente as linguagens do ω^k-ésimo (resp. $\omega^k + 1$-ésimo) nível da hiper-hierarquia aritmética.

Conclusões/perspectivas

- Construímos uma versão computável da teoria de existência e unicidade para EDOs
- Mostramos que EDOs "bem-comportadas", i. e. definidas com funções analíticas, podem ter propriedades não-computáveis
- Seria interessante ter resultados equivalentes ao nível da *complexidade computacional*
- Seria interessante saber qual a subclasse das funções analícas para a qual as propriedades anteriores se tornam computáveis (essa classe terá de incluir as funções lineares)

Obrigado!