GEOMETRIA E COMBINATÓRIA

Ilda Perez da Silva

FCUL/CELC

SPM - Coimbra - 1/3/2008

Conteúdo: Geometria/Combinatória/Topologia

1. Problema de Sylvester - duas demonstrações.

2. Uma das demonstrações é mais geral do que a outra. Porquê.
arranjos de pseudomeridianos / pseudorectas

3. Resultados sobre arranjos de pseudorectas.

4. Problemas em aberto.

5. Codificação de arranjos de pseudomeridianos - Matroides orientados.

1. Problema de Sylvester - 1893

Provar que qualquer que seja o conjunto finito $\mathcal{P}$ de pontos do plano, não todos colineares, existe uma recta que contem exactamente dois pontos de $\mathcal{P}$.

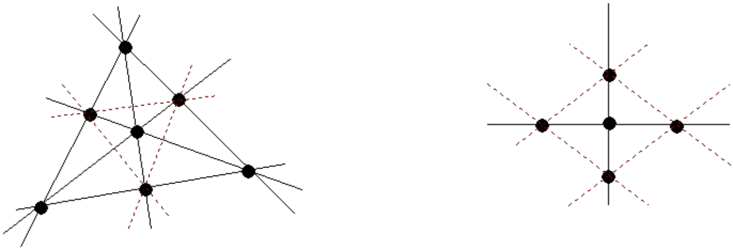


Figure: A tracejado - Rectas simples (com exactamente 2 pontos)

1^a demonstração - Galai 1933:

Seja $\mathcal{R}$:=$\{$ todas as rectas geradas por pontos de $\mathcal{P}\}$.
Consideremos um ponto $P \in \mathcal{P}$ e uma recta $r \in \mathcal{R}$ tais que

$$d(P, r) = min_{Q \in \mathcal{P}, s \in \mathcal{R}, P \notin s} d(Q, s) := d(> 0)$$

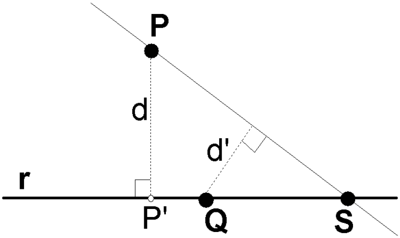
A recta r tem exactamente dois pontos de $\mathcal{P}$.

1^a demonstração - Galai 1933:

Seja $\mathcal{R}$:={ todas as rectas geradas por pontos de $\mathcal{P}$}.
Consideremos um ponto $P \in \mathcal{P}$ e uma recta $r \in \mathcal{R}$ tais que

$$d(P, r) = min_{Q \in \mathcal{P}, s \in \mathcal{R}, P \notin s} d(Q, s) := d(> 0)$$

A recta r tem exactamente dois pontos de $\mathcal{P}$.



d'<d
absurdo!

2^a demonstração -Steenrod - 1943:

Ingredientes: **Dualizar o problema**

Relação de Euler para grafos planos

Dualizar

Ortogonalidade - vectores de $IR^3 \longleftrightarrow$ planos vectoriais de IR^3
Polaridade - pontos do plano (proj.) $\longleftrightarrow$ meridianos da esfera S^2,
rectas do plano (proj.)

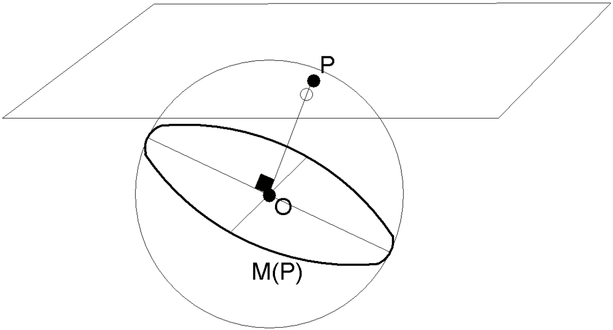


Figure: polaridade/dualidade

Problema de Sylvester - Versão dual ou polar

Ponto P	$\longleftrightarrow$	Merideano $M(P)$
Conjunto (finito) de pontos do plano (projectivo)	$\longleftrightarrow$	Arranjo de meridianos da esfera
Recta gerada por P_1, P_2	$\longleftrightarrow$	Par de pontos opostos $M(P_1) \cap M(P_2)$
Rectas simples	$\longleftrightarrow$	Pontos simples (um par)
Conjunto de pontos colineares	$\longleftrightarrow$	Arranjo de meridianos trivial

Problema de Sylvester - Versão dual ou polar

Provar que qualquer que seja o arranjo de meridianos $\mathcal{M}$, não trivial, existe um par de pontos opostos da esfera que é intersecção de exactamente dois meridianos de $\mathcal{M}$ (par de pontos simples).

O que é um grafo plano

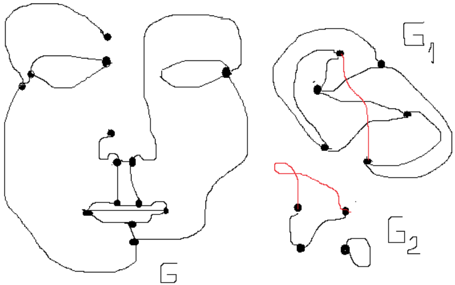
Grafo plano - $G = (V, A)$ em que:

vértices - pontos do plano (ou da esfera)

arestas -curvas simples do plano (ou da esfera) unindo dois vértices e satisfazendo a condição seguinte:

se duas arestas (curvas) se intersectam os pontos comuns são vértices, extremidades de ambas.

Um grafo plano divide o plano (esfera) em regiões : as faces do grafo.

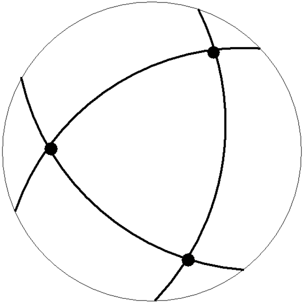


Relação de Euler para grafos planos

Relação de Euler para grafos planos

Seja G um grafo plano conexo. Os números v, a, f, *respectivamente, de vértices, arestas e faces do grafo satisfazem a igualdade:*

$$v - a + f = 2.$$



v=6

a=12

f=8

v - a + f = 6 - 12 + 8 = 2

2^a demonstração - da versão dual

$\mathcal{M}$ - arranjo de meridianos da esfera.
$G(\mathcal{M})$ - vértices - os pontos intersecção de meridianos de $\mathcal{M}$ e arestas - arcos de meridiano que unem dois vértices.
$G(\mathcal{M})$ é um grafo plano e conexo.
- As faces de $G(\mathcal{M})$ têm pelo menos 3 arestas

(1) $$3f \leq 2a \Longleftrightarrow f \leq \frac{2}{3}a$$

- Os vértices são extremidade da um número par de arestas, pelo menos 4. Se todos os vértices tiverem grau maior ou igual a 6:

(2) $$6v \leq 2a \Longleftrightarrow v \leq \frac{1}{3}a$$

De (1) e (2) sai que $v - a + f \leq \frac{1}{3}a - a + \frac{2}{3}a \leq 0$. Absurdo!

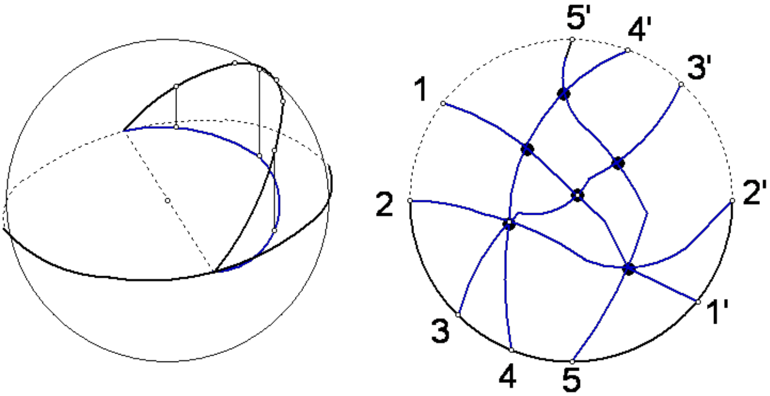
2. Qual a demonstração mais geral?

A 2^a demonstração é mais geral do que a 1^a

- Na primeira o argumento principal é a noção de distância euclideana /produto interno argumento algébrico.
- Na segunda o argumento principal é a Relação de Euler geométrico + combinatório argumento topológico. Esta demonstração é claramente aplicável a mais objectos, nomeadamente a:

Arranjos de pseudomeridianos da esfera

Arranjos de pseudorectas no plano projectivo real



arranjos de pseudomeridianos - arranjo de pseudorectas no plano projectivo real duas pseudorectas têm um e um só ponto em comum onde se cruzam

A 2^a dem. é mesmo mais geral?

A 2^a dem. é mesmo mais geral?

Há mais arranjos de pseudorectas (pseudomeridianos) do que arranjos de rectas (meridianos)?
ou, pelo contrário: Qualquer arranjo de pseudorectas é rectificável?

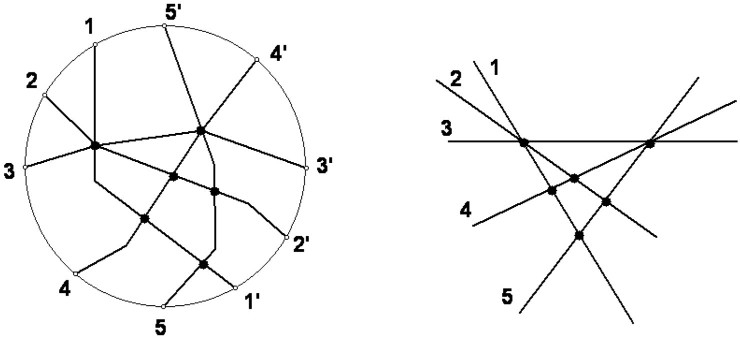
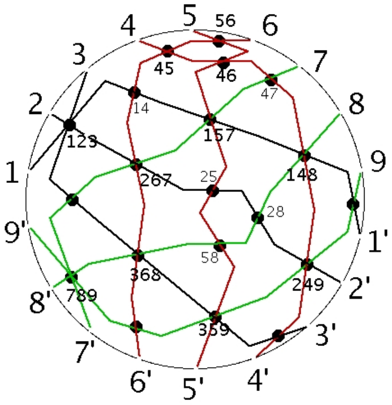
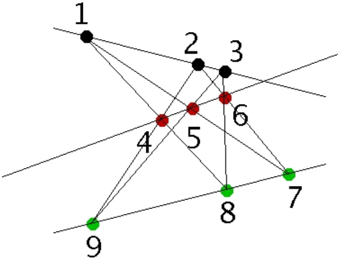


Figure: um arranjo de pseudorectas rectificável

Um arranjo não rectificável - Levi-1926





Teorema de Pappus

Teorema Goodman e Pollack 82 *Qualquer arranjo de 8 (ou menos) pseudorectas é rectificável.*

3. Resultados sobre arranjos de pseudorectas

O que poderá ser o polar de um arranjo de pseudorectas?

Goodman 80, Cordovil 82- definição combinatória de polaridade para arranjos de pseudorectas - pseudoconfigurações de pontos. O polar pode não ser único.

Existe algum processo geral (algoritmo) para decidir se um dado arranjo de pseudorectas é ou não rectificável?

Mandel 78 - SIM, via matroides orientados + um Teorema de Tarski (51).
Bokowski-Sturmfels 85, Bokowski-Richter 90 - implementação de algoritmos (representabilidade de matroides orientados).

Resultados sobre triângulos em arranjos de pseudorectas

Proposição
Qualquer arranjo de pseudorectas $\mathcal{A}$ tem pelo menos uma região triangular (triângulo)

Demonstração via Fórmula de Euler, análoga à do Problema de Sylvester.

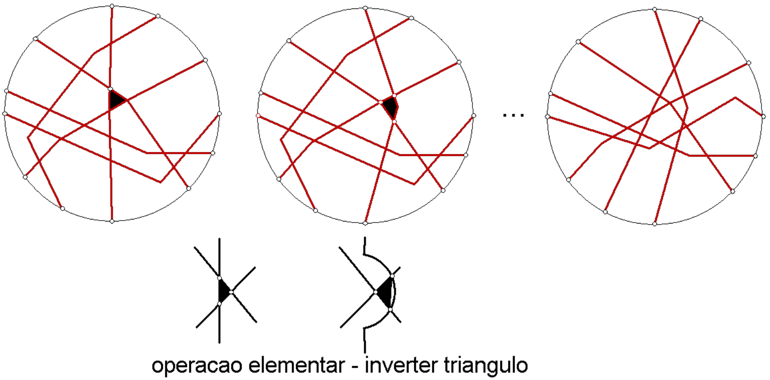
Teorema Levi 26, Grunbaum 71
Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de n pseudorectas.
(i) Seja L uma pseudorecta de $\mathcal{A}$. Existem 3 triângulos de $\mathcal{A}$ com um dos lados contido em L .
(ii) $\mathcal{A}$ tem pelo menos n triângulos.

(notar que (ii) é uma consequência imediata de (i).)

A importância dos triângulos

Teorema Ringel 57, Roudneff 85

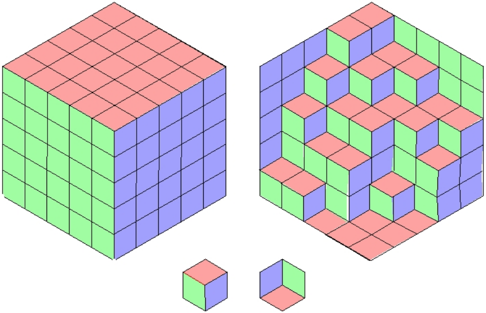
Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ dois arranjos simples de $n \geq 3$ pseudorectas então existe uma sucessão de arranjos simples (todos com n pseudorectas): $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \ldots, \mathcal{A}_k = \mathcal{A}'$ em que cada arranjo $\mathcal{A}_i$ é obtido do anterior invertendo um triângulo.



Generalização do resultado anterior - da Silva 93

Uma aplicação : Na figura estão representadas duas pavimentações de um hexágono regular de lado 5 (e.g. n) com lozangos de lado 1. Em cada uma das pavimentações colorimos da mesma cor os lozangos cujos lados são paralelos aos mesmos lados do hexágono preenchido.

Qual o número de hexágonos de cada cor em cada uma das pavimentações ?



operacao elementar– inverter hexagono

4. Problemas em aberto : arranjos de pseudorectas

sobre rectas/pontos simples

Conjectura 1. Dirac 51
Seja $s(n) :=$ nº mínimo de rectas simples de qualquer configuração de n pontos do plano. Provar que $s(n) = [\frac{n}{2}]$

Csima, Sawyer 93 - $s(n) \geq [\frac{6n}{13}]$ (para pseudoconfigurações de pontos/ arranjos de pseudorectas).

Conjectura 2. Fukuda,da Silva 98
Seja $\mathcal{P}$ uma configuração de n pontos do plano. Qualquer partição não - Radon equilibrada de $\mathcal{P}$ separa os dois pontos de uma recta simples.

Finschi,2001 VERDADE para pseudoconfigurações de pontos se $n \leq 8$. CONTRAEXEMPLO para $n = 9$ - "único".

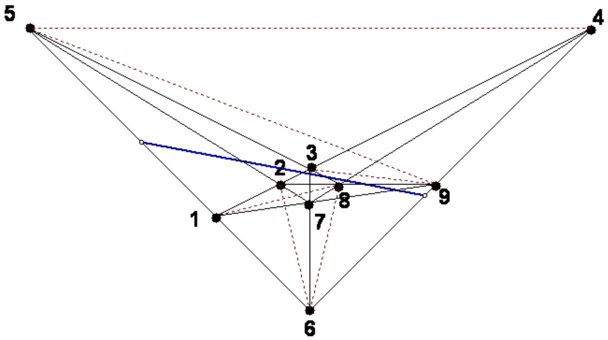


Figure: o contraexemplo de Finschi

Para n par? Família infinita de contra-exemplos?

Problemas em aberto - arranjos de (pseudo)rectas

sobre triângulos

Conjecture 3. Grünbaum 71 Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de n pseudorectas. Seja L uma pseudorecta de $\mathcal{A}$. Existem $n-3$ triângulos de $\mathcal{A}$ que não têm nenhum lado contido em L.

Shannon 79 - verdade para arranjos de rectas (e.g. de hiperplanos).

Problema Grünbaum 71 Classificação/enumeração dos **arranjos de pseudorectas simpliciais**? (todas as regiões são triângulos).

5. Arranjos de pseudomeridianos - matroides orientados

Arranjos pseudomeridianos da esfera (dim d)-obj. topológico

codificar combinatóricamente

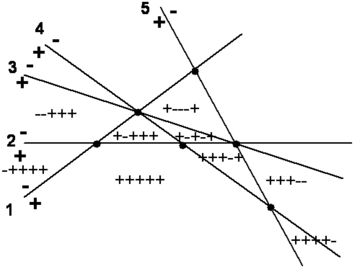
Matroides Orientados -obj. combinatório

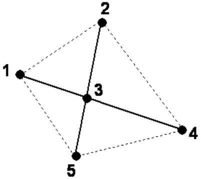
Bland, Las Vergnas, Folkman e Lawrence JCT(B)-78

Várias codificações combinatórias
Vários sistemas de axiomas "equivalentes" de matroide orientado.

álgebra linear / programação linear / convexidade combinatórias

Exemplo:arranjo de pseudorectas/ matroide orientado





Lista dos vectores de sinais das regiões:
$\{(+,+,+,+,+),\ (-,+,+,+,+),\ (+,-,+,+,+),\ (+,+,+,-,+),$
$(+,+,+,+,-),\ (-,-,+,+,+), (+,-,+,-,+),\ (+,+,+,-,-)$
$(+.-,-,-,+)$ *e os opostos*$\}$

Lista das orientação dos triângulos (ordenados):

$$\begin{bmatrix} 123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 145 & 234 & 235 & 245 & 345 \\ + & + & + & 0 & + & + & - & 0 & + & + \end{bmatrix}$$

Generalização de resultados referidos anteriormente

1. Generalização do Teorema de Sylvester - Hansen 65, Edmonds,Mandel 82

2. Generalização da existência de um par triângulos

Conjectura Las Vergnas *Qualquer arranjo de pseudomeridianos da esfera S^d tem um par de regiões opostas simpliciais*.

3. Generalização da existência de polar (adjunto) - Bachem, Kern 86, Cordovil 87. Há matroides orientados que não têm polar (adjunto).

4. Algoritmos para verificar se arranjo de pseudomeridianos é "rectificável" (representável).
Mandel 78, Bokowski-Sturmfels 87, Bokowski-Richter 90, Lombardi 90

Matroides Orientados: tópicos em desenvolvimento

Orientabilidade de matroides/de classes de matroides
Bland-Las Vergnas, Bokowski-Guedes de Oliveira, Ziegler, Forge, da Silva...
Reconstrução de matroides orientados a partir de informação parcial.
Hamidoune-Las Vergnas, Roudneff, Bokowski, Sturmfels, Alfonsin, da Silva...,
Estrutura topológica do espaço da extensões/triangulações de um matroide orientado.
Billera, Munson, Billera-Kapranov-Sturmfels, Ziegler, de Loera, Santos...
Geometria diferencial combinatória
MacPherson, Gel'fand, Anderson, Davis, Reiner...