

Tarde de Matemática, CIM e SPM
ÁLGEBRAS de LIE e APLICAÇÕES



Sophus Lie (1848-1899)

Da Mecânica à Física das Partículas

Brigitte Hiller, Departamento de Física, FCTUC



Emmy Noether
(1882-1935)

Teoria de grupos: linguagem das transformações de simetria

Grupos de Lie: transformações contínuas. "Manifold" analítico →

Álgebras de Lie: Espaço tangencial à identidade do grupo. Em particular para um grupo linear (matrizes) pode ser obtido explicitamente derivando curvas na identidade.

Teorema de Noether: Simetrias $\iff$ Leis de conservação.

Mini-história:

Problema da não conservação local da energia em gravitação geral preocupa David Hilbert, Felix Klein, e Albert Einstein. Noether é convidada por Hilbert para Goettingen para ajudar na resolução do problema.

Hilbert: deriva as equações da gravitação geral de Einstein a partir do princípio variacional de Hamilton. Com esta base Noether formula dois teoremas gerais que resolvem o problema e regem a Física a partir de então.

Teoremas de Noether

I: Aplica-se a teorias em que a acção é uma invariante de um grupo de Lie finito; sempre que as equações de movimento estão satisfeitas, encontra-se uma corrente de simetria conservada.

II: Aplica-se a teorias em que a acção é uma invariante de um grupo de Lie de simetria contíua infinita: Existem certas identidades (dependências) covariantes em relação ao grupo, entre as funções de Lagrange e suas derivadas. Exemplo: identidades de Bianchi.

Hermann Weyl: ” *One of the reasons why her theorems have been very important for 20th century physics is because they are in ‘a generalized group theory version’.*

Extensões quânticas dos Teoremas de Noether :

- (i) Identidades de Ward-Takahashi, válida para processos fora da camada de massa
- (ii) Identidades de Slavnov-Taylor, para teorias de gauge.

GRUPOS DE SIMETRIA

Group	Transformation	Unmeasurable Quantities	Conserved Quantities
Rotation, SO(3)	Spatial rotations	Absolute angle	Angular momentum L
Translation	Spacetime translations	Absolute position	Energy E, or Mass M and Momentum P
Lorentz	Spacetime rotations and Reflections	Absolute uniform velocity, Orientation	Spacetime interval S, Parity P, Time reversal T
SL(2,C) (Homogeneous Lorentz)	Spacetime rotations	Absolute uniform velocity	S (not P or T)
Diffeomorphism (General Coordinate)	Spacetime curvature (acceleration)	Absolute acceleration	Topological invariants*
Poincaré	Lorentz plus Translations	(see above)	L, E (or M) and P
U(1)	Scalar Phase Shift	Absolute phase	Electric charge
SU(2)	2-D Phase Shift	Absolute 2-D phase	Isospin
SU(3)	3-D Phase Shift	Absolute 3-D phase	Color

A Natureza tem algo a dizer sobre representações de grupos

Experiência Stern-Gerlach: a escolha da Natureza pelo grupo $SU(2)$ em Mecânica Quântica.

O grupo clássico de invariança rotacional é $SO(3)$.

E em M.Q.?

Acção de $SO(3)$ é mediada por representações unitárias actuando num espaço de Hilbert.

Em M.Q. a álgebra do momento angular J é uma álgebra de Lie, em que iJ é operador unitário e hermítico.

Em 1921 Otto Stern e Walter Gerlach tentam demonstrar a quantização do espaço, preconizada por Bohr.

- Princípio da experiência: partículas com carga e com J não nulo produzem momento magnético $\mu = \frac{ceJ}{2m}$. Num campo magnético não uniforme um feixe de átomos de prata com μ fica sujeito a uma força e as partículas são deflectidas dependendo da direcção de μ .

- Mec. Clássica.: distribuição contínua

- M.Q.: **bandas discretas**, correspondendo aos valores autorizados da projecção J_z .

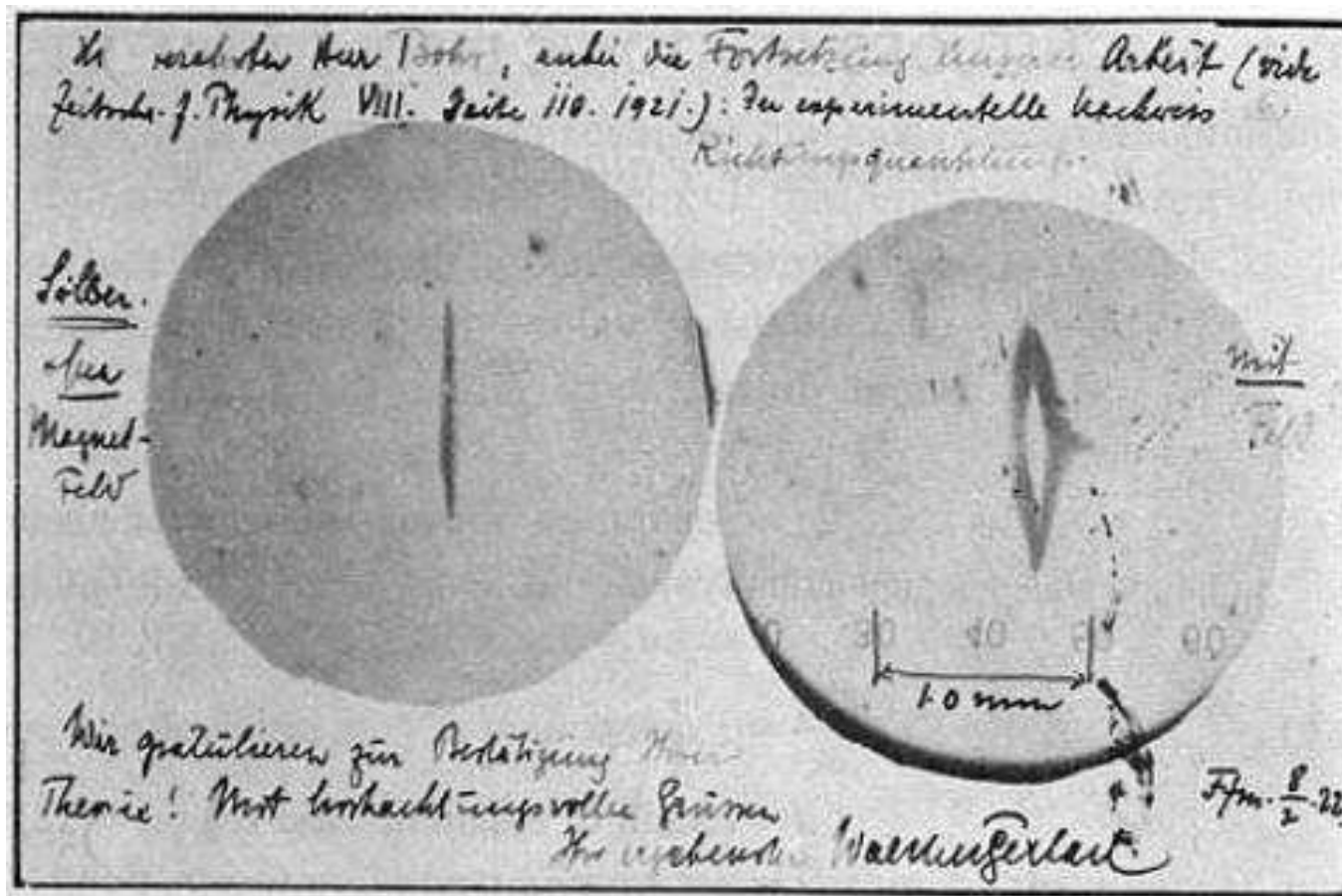
Representações da álgebra de Lie $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$:

(i) de dimensão **par** são representações projectivas (spinoriais) de $SO(3)$, provenientes do grupo $SU(2)$ de transformações unitárias unimodulares, localmente isomorfo a $SO(3)$. Duas matrizes de $SU(2)$, $U, -U \rightarrow R_U = R_{-U}$ em $SO(3)$.

(ii) de dimensão **ímpar** são representações usuais.

O número de bandas é proporcional à dimensão da representação $SO(3)$.

Observado: duas bandas.



Physics Today, Dec. 2003, Vol. 56

prata: 46 electrões com momento orbital nulo $\rightarrow$ representação trivial
 +1 electrão de valência com momento orbital nulo $\rightarrow$ tem de possuir momento angular interno $J = \frac{1}{2}$, o spin, desdobrado em dois feixes.

Em 1921 spin não tinha sido descoberto!!! Passaram-se mais 7 anos!

Teoria de campos local (a dinâmica não permite comunicação instantânea entre pontos do espaço diferentes)

Análogo de coordenadas generalizadas $\{q_i\}$: campo $\phi_a(\vec{x}, t)$.

Densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}(\phi_a(\vec{x}, t), \frac{\partial \phi_a(\vec{x}, t)}{\partial x^\mu})$$

Limite clássico, equações do movimento: extremo de S variando sobre todos os campos $\phi_a(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \right] = 0. \quad (1)$$

Invariança e leis de conservação em exemplos:

Caso simples: **Campo escalar**

Comportamento sob transformações relativistas.

Dois sistemas de coordenadas x_μ e $\bar{x}_\mu$ inerciais relacionados através de uma **transformação de Lorentz** $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$\bar{x}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu;$$

Norma preservada

$$x^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \bar{x}^\alpha g_{\alpha\beta} \bar{x}^\beta = \bar{x}^2$$

$\phi(x)$: campo escalar observado em x_μ

$\bar{\phi}(\bar{x})$: campo escalar observado no mesmo ponto físico mas sistema $\bar{x}_\mu$

Para um escalar

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(\Lambda^{-1}\bar{x})$$

As acções vistas nos diferentes sistemas são iguais se

$$\mathcal{L}'(\bar{\phi}_i, \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{x}_\mu}) = \mathcal{L}(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu}) \frac{d^4 x}{d^4 \bar{x}} \quad (2)$$

Invariança de Forma

Se $d^4 \bar{x} = d^4 x$: densidade Lagrangeana preserva a sua forma sob a transformação,

$$\mathcal{L}'(\bar{\phi}_i, \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{x}_\mu}) = \mathcal{L}(\bar{\phi}_i, \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{x}_\mu})$$
$$\int_{\bar{R}} d^4 \bar{x} \mathcal{L}'(\bar{\phi}_i, \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{x}_\mu}) - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu}) = 0. \quad (3)$$

Transformação infinitesimal (válida para outros tipos de campos também)

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x) = x^\mu + \sum_{a=1}^N [\partial x^\mu / \partial (\delta \beta_a)] \delta \beta_a$$

$$\bar{\phi}_i(\bar{x}) = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x, \phi_i) = \phi_i(x) + \sum_{a=1}^N [\partial \phi_i / \partial (\delta \beta_a)] \delta \beta_a.$$

- Mudando do sistema "de barras" para o outro:
- envolve o Jacobiano $1 + \partial(\delta x_\mu) / \partial x_\mu$,
- variações dos campos

$$\delta \phi_i = \bar{\phi}_i(\bar{x}) - \phi_i(x) \qquad \delta_* \phi_i(x) \equiv \bar{\phi}_i(x) - \phi_i(x) \qquad (4)$$

e suas derivadas

- condições fronteira apropriadas
- uso das equações do movimento,

conduz ao **teorema de Noether**:

$$\frac{\partial J^\mu_a}{\partial x^\mu} = 0 \quad (5)$$

$$J^\mu_a = -\mathcal{L}\left[\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial\beta_a}\right] - \sum_i [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\phi_i)][\partial(\delta_*\phi_i)/\partial\beta_a] \quad (6)$$

As cargas $Q_a = \int J_a^0(x)d^3x$ são integrais do movimento

Se Q_a não depende explicitamente do tempo, $\dot{Q}_a = 0$, $\{Q_a, H\}_{P.B.} = 0$
 $\rightarrow [\hat{Q}_a, \hat{H}] = 0$
 $\rightarrow$ constantes do movimento.

Relação com álgebra de Lie: parâmetros de transformação β_a ligados a uma simetria

Grupo de simetria interna exacta em Física:

Exemplo: Lagrangeano de Klein-Gordon para um campo complexo vectorial ϕ de n componentes

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi(x)) - m^2 |\phi(x)|^2 - U(|\phi(x)|^2) \quad (7)$$

Invariança sob transformação de uma fase global (constante em todo o espaço-tempo)

$$\phi' = U_{ij} \phi_j, \quad U^\dagger U = 1, \quad \bar{x}_\mu = x_\mu,$$

U : matrizes unitárias unimodulares $n \times n$ formam um grupo de Lie e são uma representação R do grupo $U(n)$.

Álgebra de Lie:

Qualquer grupo de Lie numa dada representação R pode ser parametrizado de modo a que o parâmetro do elemento identidade seja $\{\beta_0 = 0\}$.

Qualquer elemento de R perto da identidade pode ser escrito em termos de matrizes $D^{(R)}(\beta_a)$, os geradores do grupo $t_a^{(R)}$ nessa representação

$$D^{(R)}(\beta_a) = 1 + i \sum_{a=1}^{d(G)} (\delta\beta_a) t_a^{(R)}$$

Extensão para elementos finitos β_a possível sempre que estes possam ser obtidos através de sucessivas transformações infinitesimais a partir da unidade

$$D^{(R)}(\beta_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} [I + (i/N) \sum_a (\beta_a) t_a^{(R)}]^N = \exp[i \sum_a (\beta_a) t_a^{(R)}]$$

Qualquer que seja R os geradores satisfazem

$$[t_a^{(R)}, t_b^{(R)}] = iC_{ab}{}^c t_c^{(R)} \quad (8)$$

Transformações infinitesimais dos campos ϕ

$$\delta\phi_i(x) = i \sum_{a,j} (\delta\beta_a) (t_a)_{ij} \phi_j, \quad \delta\phi_i(x)^* = C.C. \quad (9)$$

Corrente conservada:

$$J^\mu{}_a = -i \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (t_a)_{ij}^{(R)} \phi_j - C.C. \right\} \quad (10)$$

Em teoria de campos os geradores de grupo que se obtêm integrando sobre todo o espaço a componente temporal de correntes hermiticas conservadas pertencem a um grupo de simetria interna.

SIMETRIA LOCAL: fundamento do Modelo Standard

Yang e Mills em 1954 demonstram que simetrias locais exigem a adição de termos de interacção para preservar a simetria.

1. Electromagnetismo clássico (o berço das teorias de padrão (gauge)).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (12)$$

Restrições 11 automaticamente satisfeitas com potenciais escalar ϕ e vectorial $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13)$$

Invariança sob transformações de padrão

$$\phi' = \phi + const \quad \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla}\lambda(x) \quad (14)$$

Forma compacta das equações de Maxwell em termos dos tensores anti-simétricos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (15)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (16)$$

e tetra-vectores (covariância relativista)

$$j_\mu = (\rho, \vec{J}) , \quad A_\mu = (\phi, \vec{A})$$

QED: teoria renormalizável U(1) local

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{int} \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (19)$$

$\mathcal{L}_\psi$ invariante sob transformação $U(1)$ global:

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-i\alpha)\psi$$

$$\delta\mathcal{L}_\psi = \epsilon\partial_\mu(j_\psi^\mu) = 0 \quad j_\psi^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (20)$$

Caso especial do teorema de Noether: Simetria $\rightarrow$ Lei de conservação.

$\mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int}$: Simetria local.

Maneira conveniente de se construir: a partir da global com derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}'_\mu \psi' = \exp(-i\alpha(x))(\mathcal{D}_\mu \psi).$$

A simetria local fixa a dinâmica.

Simetria local mais restrita que global: **Conduz a uma nova lei de conservação?**

Não, a corrente de simetria para a conservação do número de electrões ou positrões continua a ser a mesma $j_\psi^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Notável: a equação do movimento para A_μ

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = ej_\psi^\nu \quad (21)$$

A corrente (termo inhomogéneo das eqs. de Maxwell) é precisamente $e \times$ corrente de simetria global U(1).

Propriedade chave das teorias de padrão:
correntes dinâmicas são também correntes de simetria.

Teorias de Yang-Mills

Transformações de padrão não abelianas

$A_\mu(x) = -igA_\mu^\alpha(x)T^\alpha$ Elemento da álgebra de Lie

T : Geradores de grupo

$$[A'_\mu(x)]_{ij} = [U(x)A_\mu U^{-1}(x)]_{ij} - [(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x)]_{ij} \quad (22)$$

$$U(x) = \exp[-i\zeta(x) \cdot T] \quad (23)$$

$U(x)$: Transformações unitárias que actuam nos potenciais escalares e vectoriais;

A partir da derivada covariante, constroem-se novas invariantes, por exemplo o produto antisimétrico de duas derivadas

→ tensor antisimétrico $G_{\mu\nu}(x)$

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi(x) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu(x), A_\nu(x)])\psi(x) = G_{\mu\nu}(x)\psi(x). \quad (24)$$

A definição de derivada covariante pode ser generalizada para actuar sobre qualquer elemento da álgebra de Lie $\xi(x) = -i\xi^\alpha(x)T^\alpha$:

$$\mathcal{D}_\rho(\xi\psi) = (\mathcal{D}_\rho\xi)\psi + \xi(\mathcal{D}_\rho\psi) \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}_\mu\xi = \partial_\mu\xi + [A_\mu, \xi]. \quad (25)$$

Lagrangiano de Yang-Mills: (sem massa!)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] + \psi(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu)\psi \quad (26)$$

Equação do movimento:

$$\left(\frac{1}{g^2}\right)\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad (27)$$

Corrente conservada: Só com derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu j^\mu(x) = 0, \quad j_\mu(x) = -ij_\mu^\alpha(x)T^\alpha \quad j_\mu^\alpha(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu T^\alpha\psi \quad (28)$$

Simetrias do modelo Standard:

Simetrias de Padrão

- (i) Electromagnetismo: $U(1)_{em}$ exacta A_μ : fótons
- (ii) Interações fracas: $SU(2)_L \times U(1)_Y$ espontaneamente quebrada, quebra induzida pelo campo Higgs;
 A_μ : W^+, W^-, Z^0
- (iii) Interações fortes: $SU(3)_c$, exacta A_μ : glúons

Simetrias globais das 3 famílias de léptons e quarks:

conservação dos números leptónico, bariónico

Simetrias discretas :

O modelo standard é uma teoria local hermítica e de invariança sob transformações de Lorentz $\rightarrow$ invariante sob CPT .

QCD (na ausência do termo θ) e QED são invariantes separadamente sob P, C, T .

Mas Interações fracas: têm violação máxima de P e C no sector de correntes fracas carregadas. Se uma fase residual existe na matrix de mistura das massas dos quarks, existe quebra de CP ou equivalente de T .

**Simetrias que poderiam existir na QCD,
mas que por capricho da Natureza não existem**

- Simetria axial $U(1)$:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp(-i\theta\gamma_5)\psi$$

Se os quarks não fossem massivos. Mas nem sequer é uma simetria aproximada, pois está ligada a uma anomalia, Adler-Bell-Jackiw (1970).

- Transformações de escala

Quarks sem massa $\rightarrow \mathcal{L}_{QCD}$ sem parâmetros dimensionais
 $\rightarrow \psi(x) \rightarrow \psi(\lambda x), \quad A_\mu(x) \rightarrow \lambda A_\mu(\lambda x)$

esta invariância é também violada por uma anomalia (anomalia conformal).

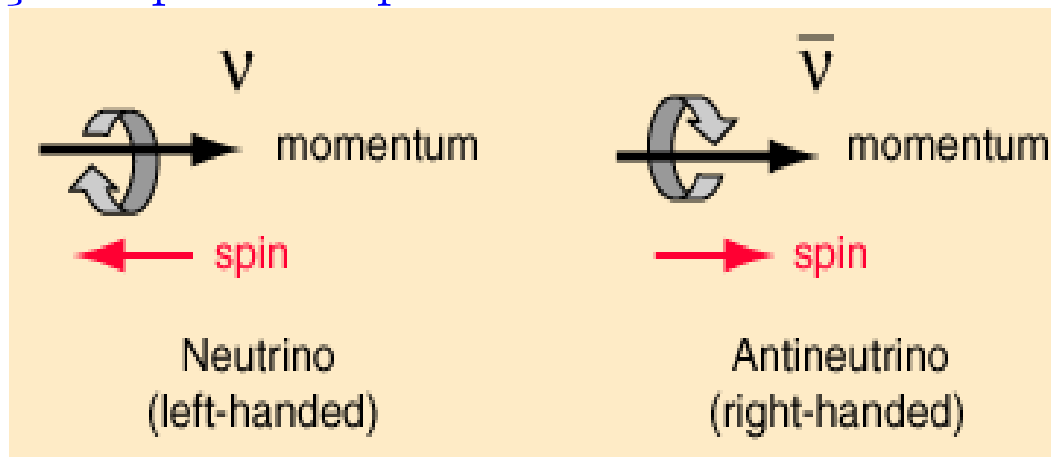
Quebras de simetria no Modelo Standard

- Termos de massa explícitos destroem simetrias quiral e de padrão.

Caso da QCD: Simetrias vectoriais válidas se as massas de quarks são idênticas. Se são nulas, há simetria adicional quiral

$$QCD|_{m=0} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] + \psi_L(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu)\psi_L + \psi_R(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu)\psi_R. \quad (29)$$

Invarianças separadas para os sectores L e R



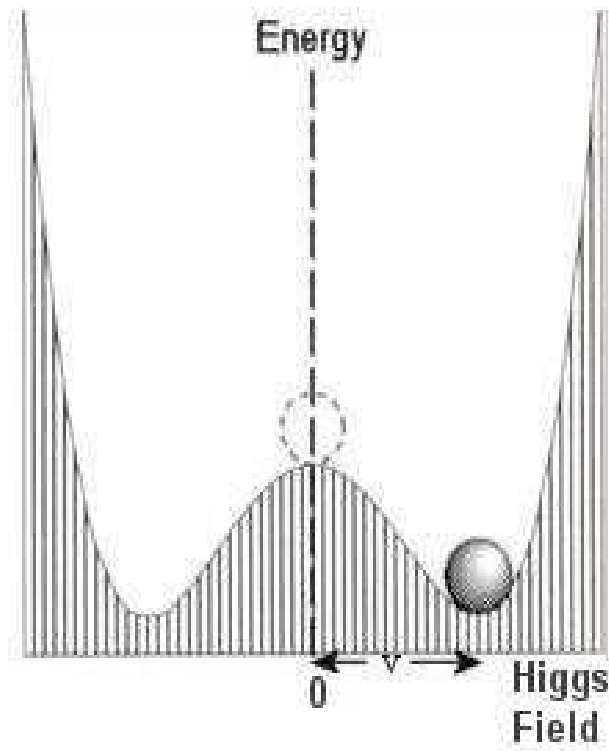
Correntes de Noether:

corrente vectorial $J_V^\mu = J_R + J_L = \bar{\psi}\gamma^\mu\tau\psi$

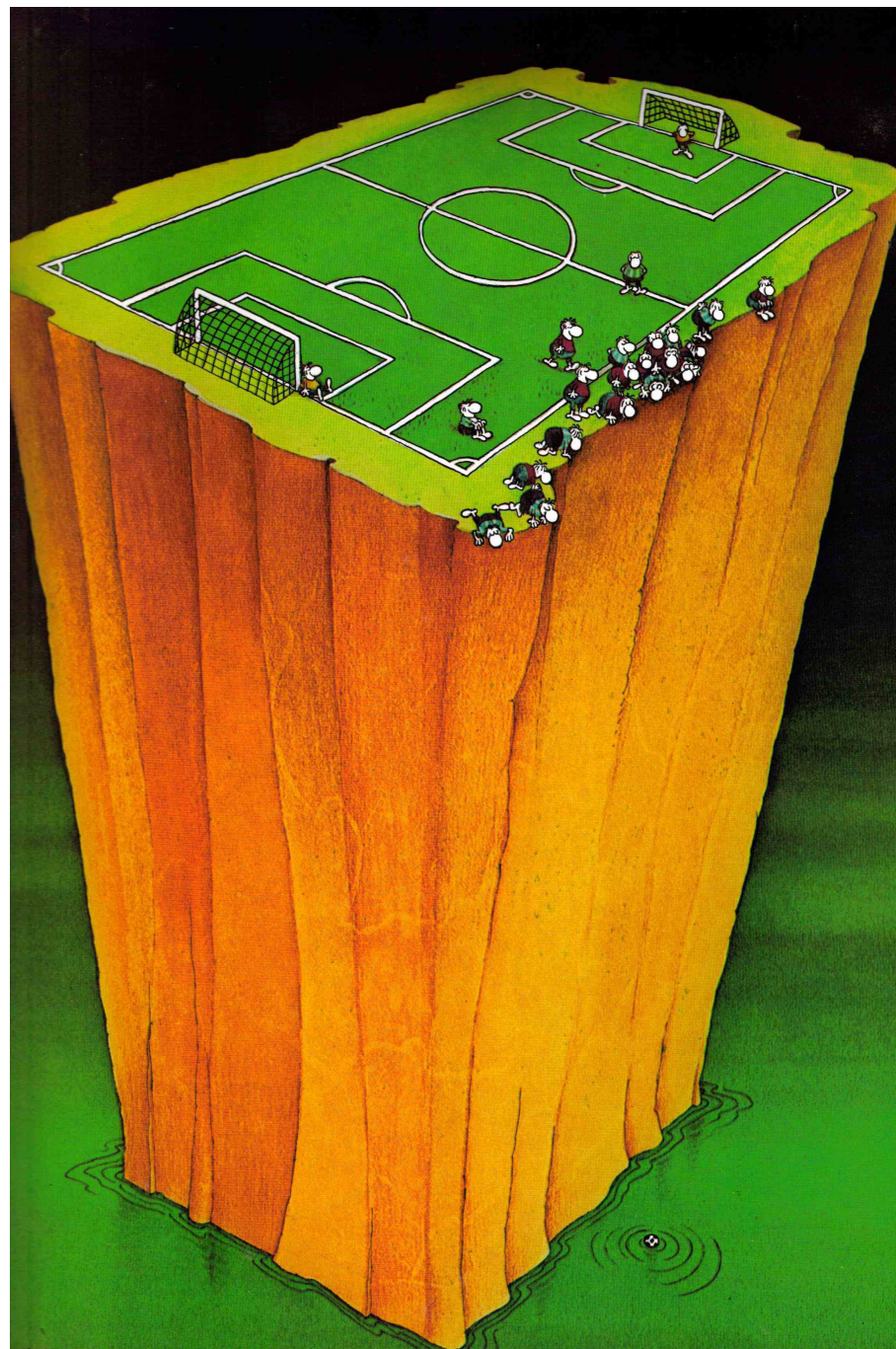
transformações quirais $\rightarrow$ corrente axial $J_5^\mu = J_R - J_L = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau\psi$

As cargas associadas Q_V, Q_A comutam com o Hamiltoniano da QCD $\rightarrow$ espectro de estados de igual massa com paridades opostas. Não observado!

Nambu e Lasinio (1960) resolvem o problema: quebra espontânea (ou dinâmica) da simetria quiral $\rightarrow$ condensados não nulos. Teorema de Goldstone.



Teoremas de Noether, identidades de Ward rigorosos em quebra espontânea!



- **Mecanismo de Higgs:** um campo complexo escalar (spin 0), dubleto de $SU(2)$ fraco, singuleto de $SU(3)$ forte, com auto-interacção quadrática e quártica interage com os fermiões (interacção de Yukawa) e bosões de padrão (derivada covariante). As massas surgem como resultado destas interacções quando a simetria do vácuo é quebrada espontaneamente.

- Perguntas actuais: o Higgs será detectado em LHC?
- O problema da naturalidade: correcções quânticas da massa do Higgs exigem um "fine-tuning" pouco credível (divergências quadráticas em vez de logarítmicas devem ser absorvidas na renormalização.)
- Teorias super-simétricas resolvem a "naturalidade" mas lançam novos desafios.

Teorias Efectivas e Simetrias

Weinberg 1992: "Non-renormalizable theories are just as renormalizable as renormalizable theories"

"...we now believe that the field theories of which we are so proud, QED, QCD, even general relativity for that matter, are not what they are because they are truly fundamental theories, but simply because they are the only way of satisfying the requirements of symmetries and S-matrix theory".

"As long as you let it be the most general possible Lagrangian consistent with the symmetries of the theory, you're simply writing down the most general theory you could possibly write down."

Princípios das Teorias Efectivas (EFT): Escalas de energia bem separadas.

A dinâmica de sistemas a baixas energias pode ser considerada independentemente dos detalhes das interacções a altas energias.

A física a uma escala Q_0^2 de altas energias condiciona os acoplamentos à escala de baixas energias Q^2 .

Exemplo: QED efectiva, escala $E_\gamma \ll m_e$ $\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}(F_{\mu\nu})$

Simetrias: Padrão, Lorentz, C,P,T

Lagrangiano de Euler (1936)

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a}{m_e^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{b}{m_e^4}(F_{\mu\nu}F^{\nu\sigma}F_{\sigma\rho}F^{\rho\mu}) + \mathcal{O}(F^6/m_e^8)$$

- Não é QED, distorce a física a altas energias.
- Reproduz a fenomenologia a baixas energias.

Muito importante: mesmo sem conhecimento explícito de a e b , $\mathcal{L}_{eff}$ contém informação não trivial, consequências das simetrias, que definem estruturas dominantes para baixas energias.

- Informação da dinâmica original da QED está necessariamente contida nos parâmetros adimensionais de baixa energia a e b .

- Vantagens de teorias efectivas: (i) mesmo que não se soubesse nada acerca de QED poderíamos fitar os parâmetros a e b através dos dados experimentais.

- (ii) A EFT contem numero finito de operadores a uma dada ordem em E/Q_0 , á escala Q_0 e pode ser tratada como teoria renormalizável, com um numero finito de contratermos.

Teoria de perturbações quiral ChPT é uma EFT da QCD a baixas energias. Lagrangiano efectivo contem as simetrias fundamentais da QCD.

Effective scalar potential V in $SU(3)$ chiral limit

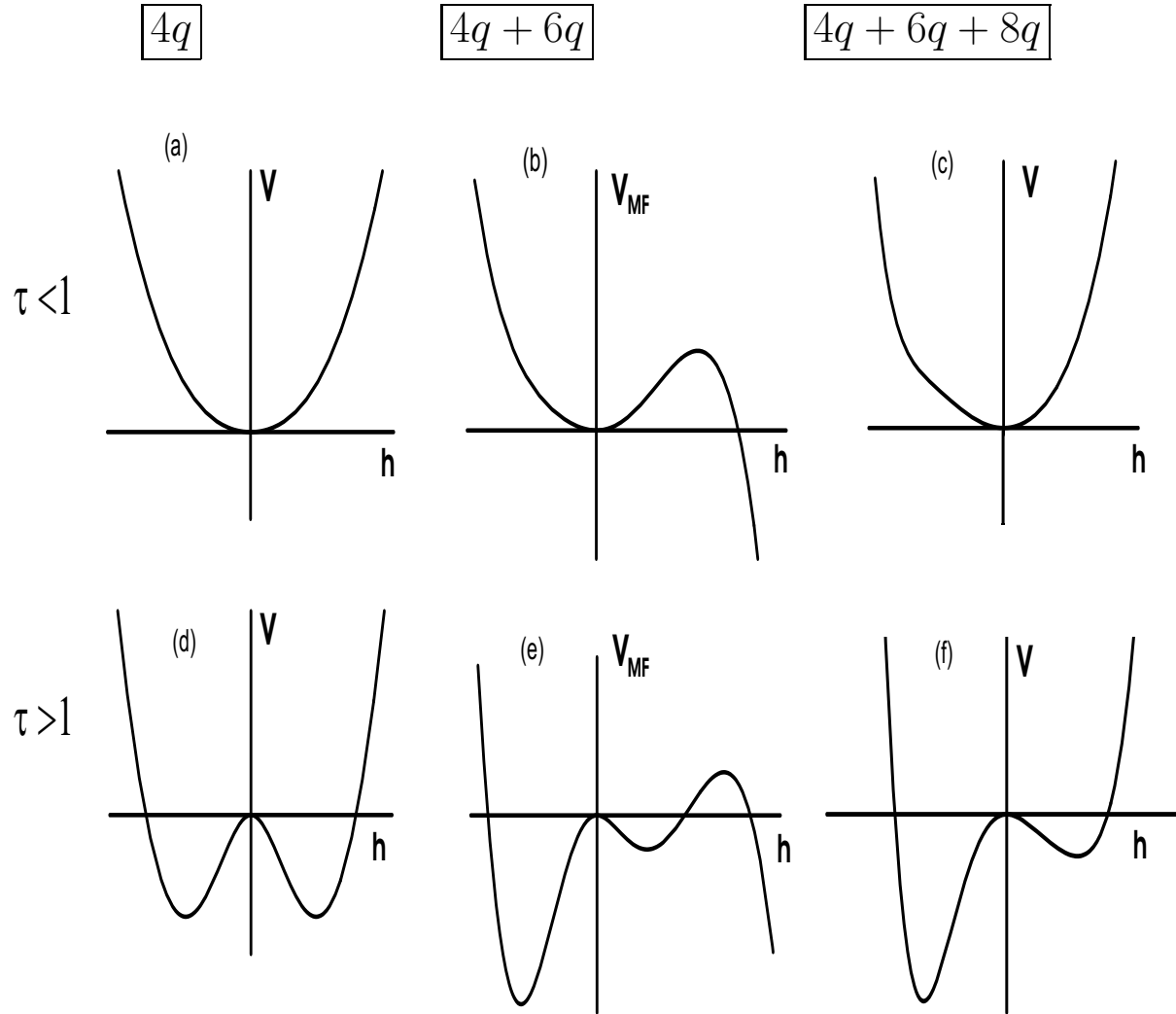


Figure 1: Effective potential in the $SU(3)$ limit.

$h \sim$ quark condensate.

$\tau = \frac{N_c G \Lambda^2}{2\pi^2} \sim$ curvature of V at origin.

Effective potential V (special detail)

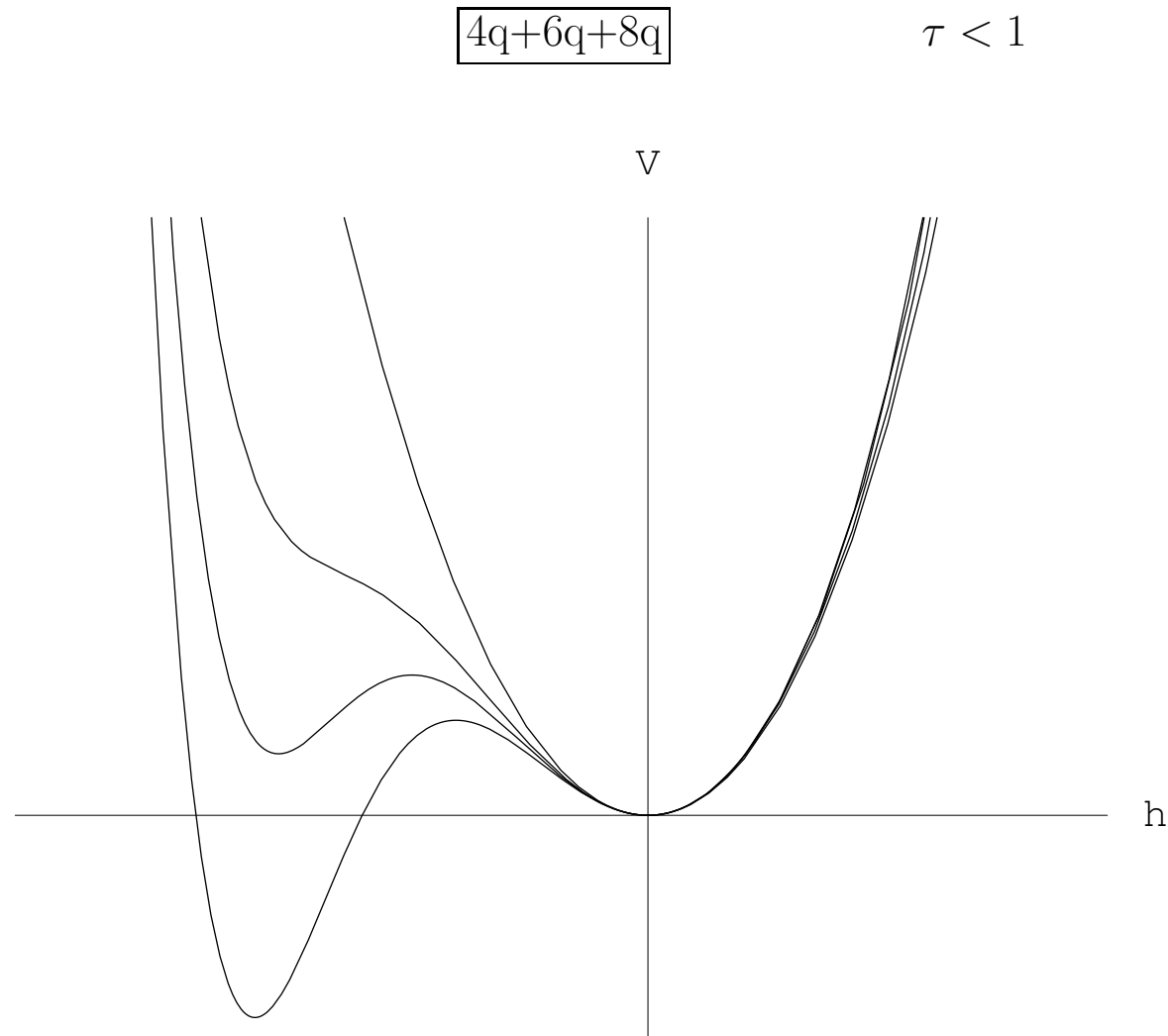


Figure 2: Effective potential V for a special case.

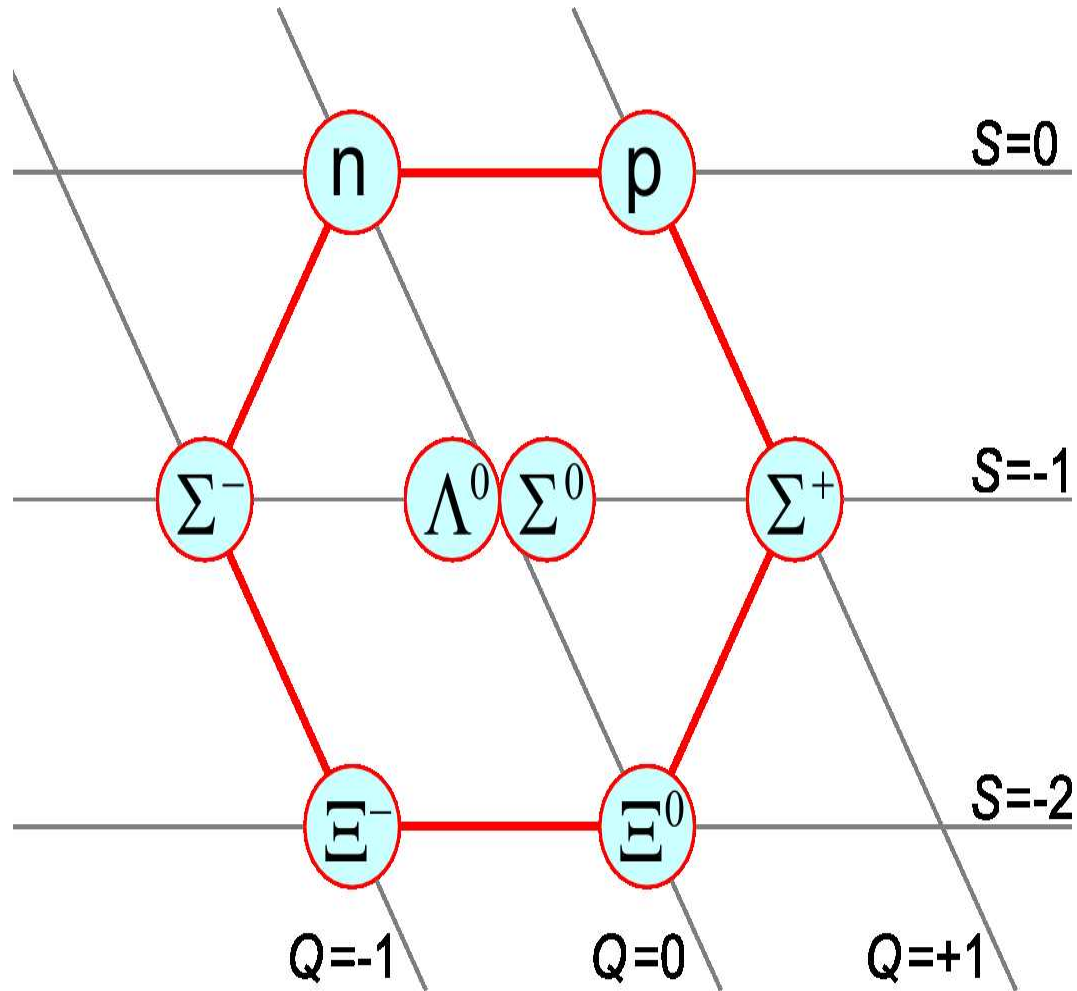
$\tau < 1$: $4q \rightarrow$ Wigner-Weyl phase.

+ 't Hooft $6q \rightarrow \chi$ SB for critical values of κ . Coexistence of two vacua.

Colaboradores em Coimbra: Alex.H. Blin, João Moreira, Alexandre A. Osipov, João da Providência, B.H.

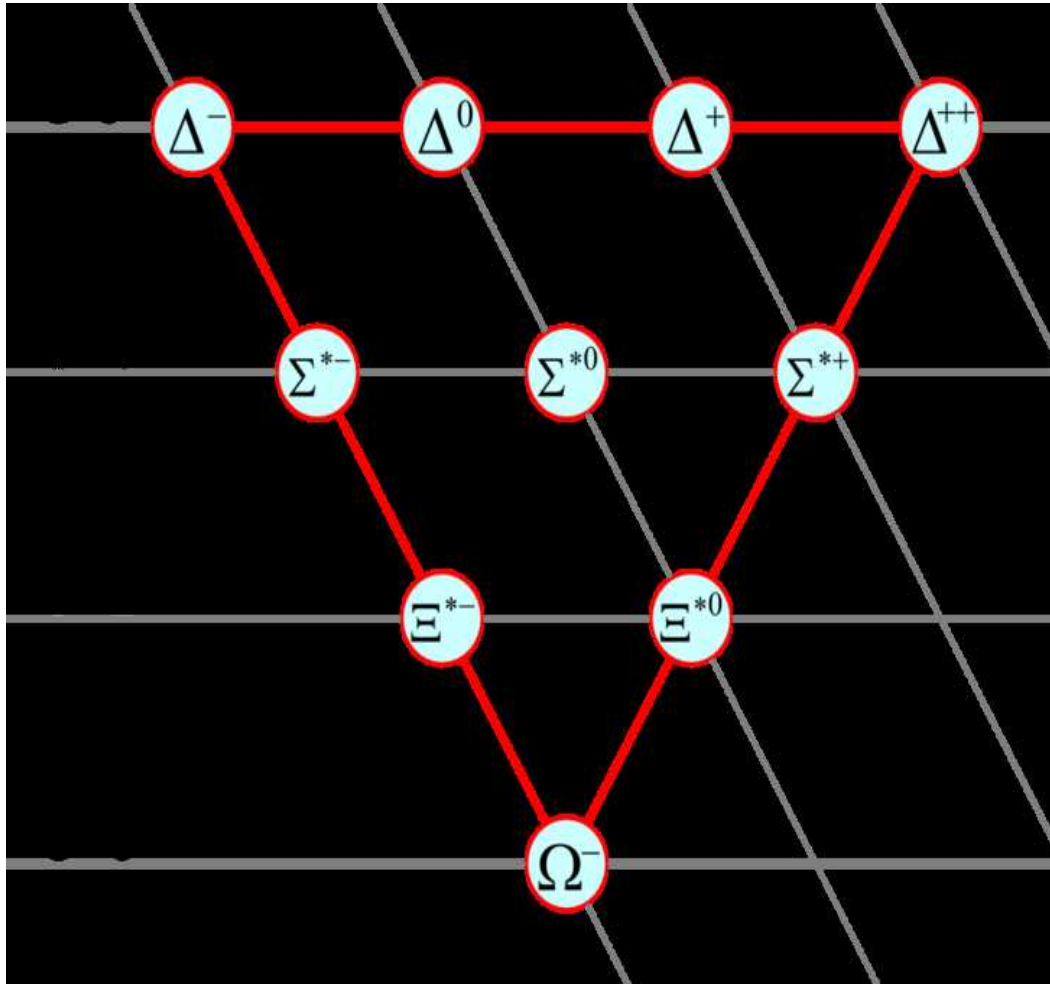
Artigos no SPIRES.

Bariões: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$
 Octeto spin = $\frac{1}{2}$



$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad Y = S + B$$

Decuplete de bárions: $\text{spin} = \frac{3}{2}$





The effective multi-quark Lagrangian: the $1/N_c$ arguments

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m})q + \mathcal{L}_{4q} + \mathcal{L}_{6q} + \mathcal{L}_{8q} + \dots \quad (30)$$

- covariant derivative $D_\mu = \partial_\mu + iQ A_\mu$
- electromagnetic field A_μ
- Quark charges $Q = e \cdot \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$.
- Quark fields have colour ($N_c = 3$) and flavour ($N_f = 3$) indices.
- Current quark mass, $\hat{m}$: $\text{diag}(\hat{m}_u, \hat{m}_d, \hat{m}_s)$, break explicitly the global chiral $SU_L(3) \times SU_R(3)$ symmetry.

- NJL four-quark interactions of the scalar and pseudoscalar types with the $U(3)_L \times U(3)_R$ chiral symmetry are given by

$$\mathcal{L}_{4q} = \frac{G}{2} \left[(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda_a q)^2 \right]. \quad (31)$$

- Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961);

After bosonization they lead to the effective meson vertices of order N_c ($G \sim 1/N_c$).

- Six-quark OZI violating 't Hooft interaction

$$\mathcal{L}_{6q} = \kappa(\det \bar{q}P_L q + \det \bar{q}P_R q), \quad (32)$$

leads after bosonization to the effective meson vertices of order 1 ($\kappa \sim 1/N_c^3$).

- The most general eight-quark $U(3)_L \times U(3)_R$ symmetric Lagrangian for spin zero interactions (without derivatives)

$$\mathcal{L}_{8q} = \mathcal{L}_{8q}^{(1)} + \mathcal{L}_{8q}^{(2)} \quad \mathcal{L}_{8q}^{(1)}: \text{ OZI violating}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{8q}^{(1)} &= 8 \, \textcolor{red}{g_1} [(\bar{q}_i P_R q_m)(\bar{q}_m P_L q_i)]^2 = \frac{\textcolor{red}{g_1}}{32} [\text{tr}(S - iP)(S + iP)]^2 \\ &= \frac{\textcolor{red}{g_1}}{8} (S_a^2 + P_a^2)^2, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{8q}^{(2)} &= \frac{\textcolor{red}{g_2}}{16} \text{tr} [(S - iP)(S + iP)(S - iP)(S + iP)] \\ &= \frac{\textcolor{red}{g_2}}{8} [d_{abe} d_{cde} (S_a S_b S_c S_d + P_a P_b P_c P_d + 2S_a S_b P_c P_d) \\ &\quad + 4f_{ace} f_{bde} S_a S_b P_c P_d]. \end{aligned} \quad (34)$$

Trace over flavour indices $i, j = 1, 2, 3$;

$$S_{ij} = S_a (\lambda_a)_{ij} = 2\bar{q}_j q_i, \quad P_{ij} = P_a (\lambda_a)_{ij} = 2\bar{q}_j (i\gamma_5) q_i.$$

Simetrias aproximadas, pois os quarks são massivos. Os quarks u, d são "leves" comparados com a escala de confinamento Λ_{QCD} e formam um dubleto de $SU(2)$, o isospin forte

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \exp(-i\tau.\theta)\psi$$

com corrente de Noether

$$J_\mu^{(i)} = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\tau_i}{2}\psi$$

Incluindo o quark "s", generalização para $SU(3)$

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \exp(-i\lambda.\theta)\psi$$

com subgrupo $SU(2)$, spin U

$$\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \exp(-i\tau.\theta) \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Spin U é simetria da interacção electromagnética também, pois os seus geradores comutam com o operador de carga eléctrica. Simetria U quebrada pela diferença grande entre massas de d e s .

Grupo de simetria interna exacta em Física:

Em teoria de campos os geradores de grupo que se obtêm integrando sobre todo o espaço a componente temporal de correntes hermiticas conservadas pertencem a um grupo de simetria interna.

(i) o grupo comuta com o grupo de Poincaré

(ii) o grupo actua no espaço de Hilbert como um grupo de operadores unitários

(iii) sob a acção do grupo os estados de uma partícula formam um sub-espaço invariante.

Os estados assintóticos de muitas partículas transformam como produtos tensoriais de estados de uma partícula.

(iv) o grupo comuta com a matriz de espalhamento S

(v) a representação deve ser irredutível, para descrever a igualdade das massas de um multiplete.

(vi) a representação deve ser fechada e fiável

Estas condições são suficientes para garantir que o grupo de simetria tem de ser um

grupo de Lie compacto.

Há oito bariões com paridade positiva, spin= 1/2 e número bariónico 1, cujas massas têm um desvio máximo de 20% do valor médio das massas: $n, p, \Lambda, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \Xi^0, \Xi^-$

Há dez bariões de paridade positiva, spin=3/2, número bariónico 1, de massas 1232...1672 MeV

Hipótese: as interacções fortes formam um grupo maior do que o grupo de isospin e hipercarga.

Isospin: Em 1932 Heisenberg postulou que o p e o n são dois estados da mesma partícula, *onucleão*, um dubleto invariante sob rotações no espaço $SU(2)$, em completa analogia aos estados de spin 1/2.

Hipercarga Y foi introduzida porque os mesões K são produzidos sempre em pares nas colisões de p-p, ao passo que os píões são produzidos individualmente; o tempo de desintegração dos K é da ordem de 10^{-10} seg, desintegrações fortes acontecem em 10^{-23} seg. Atribui-se Y a todas as partículas, número quântico preservado em todas as interacções fortes.

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \qquad Y = S + B$$

Teoria da simetria do "sabor" (flavor): introduz quarks "up, down, strange" como peças estruturais dos bariões e mesões, em tripletos e anti-tripletos (anti-quarks) do grupo $SU(3)$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{u} = (1 \quad 0 \quad 0) \quad \bar{d} = (0 \quad 1 \quad 0) \quad \bar{s} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

O produto tensorial $3 \otimes \bar{3}$ de $dim = 9$ é uma representação de $SU(3)$ e decompõe-se na soma directa de duas irreps, a representação adjunta de $dim = 8$ e a identidade de $dim = 1$. Os vectores no espaço do produto tensorial de quarks e anti-quarks forma um octeto de partículas compostas, os mesões.

Os bariões são classificados de acordo com

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

Os multipletos de bariões e mesões transformam de acordo com a representação adjunta da álgebra de $SU(3)$. A sub-álgebra de Cartan (2D) fornece dois operadores que comutam, I_3 e Y , simultaneamente diagonalizáveis,

$$I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

com auto-vectores simultâneos $|\lambda, \mu\rangle$, onde λ, μ são os valores próprios dos operadores I_3 e Y sobre este estado.

Operadores de escada $I_+ = E_{12}, U_+ = E_{23}, V_+ = E_{13}$ e $I_- = (I_+)^t, U_- = (U_+)^t, V_- = (V_+)^t$, com relações de comutação

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm \quad [Y, I_3] = 0 \quad (35)$$

$$[I_3, U_\pm] = \mp \frac{1}{2} U_\pm \quad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm \quad (36)$$

$$[I_3, V_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm \quad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm \quad (37)$$

Introduzindo as combinações ortogonais de Y e I_3 , $U_3 = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}I_3$ e $V_3 = -\frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}I_3$ obtem-se três subgrupos de $SU(2)$ a que se dá o nome de spin-I, spin-U, e spin-V.