

Extensão do Quadrado Mágico de Freudenthal e Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

Isabel Cunha

UBI

Tarde SPM/CIM em Álgebras de Lie e Aplicações

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

Construção de Tits (1966)

Sejam:

C , uma álgebra de Hurwitz (álgebra de composição unital),

J , uma álgebra de Jordan central simples de grau 3.

Então:

$$T(C, J) = \operatorname{der} C \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \operatorname{der} J$$

é uma álgebra de Lie (car $k \neq 2, 3$) para um parêntesis de Lie conveniente:

Construção de Tits (1966)

Sejam:

C , uma álgebra de Hurwitz (álgebra de composição unital),

J , uma álgebra de Jordan central simples de grau 3.

Então:

$$T(C, J) = \text{der } C \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \text{der } J$$

é uma álgebra de Lie (car $k \neq 2, 3$) para um parêntesis de Lie conveniente:

$$[a \otimes x, b \otimes y] = \frac{1}{3} \text{tr}(xy) D_{a,b} + \left([a, b] \otimes \left(xy - \frac{1}{3} \text{tr}(xy) 1 \right) \right) + 2\text{t}(ab) d_{x,y}$$

Quadrado Mágico de Freudenthal

$\mathcal{T}(C, J)$	$H_3(k)$	$H_3(k \oplus k)$	$H_3(\text{Mat}_2(k))$	$H_3(C(k))$
k	A_1	A_2	C_3	F_4
$k \oplus k$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\text{Mat}_2(k)$	C_3	A_5	D_6	E_7
$C(k)$	F_4	E_6	E_7	E_8

Rearranjo da construção de Tits (Vinberg, Allison-Faulkner, Barton-Sudbery, Landsberg-Manivel)

$$J = H_3(C') \simeq k^3 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$J_0 \simeq k^2 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$\mathfrak{der} J \simeq \mathfrak{tri}(C') \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

Rearranjo da construção de Tits (Vinberg, Allison-Faulkner, Barton-Sudbery, Landsberg-Manivel)

$$J = H_3(C') \simeq k^3 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$J_0 \simeq k^2 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$\mathfrak{der} J \simeq \mathfrak{tri}(C') \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$\mathfrak{tri} C' = \{(d_0, d_1, d_2) \in \mathfrak{o}(S, b)^3 : d_0(x \cdot y) = d_1(x) \cdot y + x \cdot d_2(y), \forall x, y \in C'\}$$

Rearranjo da construção de Tits (Vinberg, Allison-Faulkner, Barton-Sudbery, Landsberg-Manivel)

$$J = H_3(C') \simeq k^3 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$J_0 \simeq k^2 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$\mathfrak{der} J \simeq \mathfrak{tri}(C') \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C'))$$

$$\mathfrak{tri} C' = \{(d_0, d_1, d_2) \in \mathfrak{o}(S, b)^3 : d_0(x \cdot y) = d_1(x) \cdot y + x \cdot d_2(y), \forall x, y \in C'\}$$

$$T(C, J) = \mathfrak{der} C \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \mathfrak{der} J$$

$$\simeq \mathfrak{der} C \oplus (C_0 \otimes k^2) \oplus (\oplus_{i=0}^2 C_0 \otimes \iota_i(C')) \oplus (\mathfrak{tri}(C') \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C')))$$

$$\simeq (\mathfrak{tri}(C) \oplus \mathfrak{tri}(C')) \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(C \otimes C'))$$

As álgebras de Lie $\mathfrak{g}(S, S')$ (Elduque)

Sejam:

- S, S' , álgebras de composição simétrica
- $\text{tri}(S), \text{tri}(S')$, as respectivas álgebras de Lie da Trialidade
- $\iota_i(S \otimes S')$, uma cópia de $S \otimes S'$.

Então:

$$\mathfrak{g}(S, S') = (\text{tri}(S) \oplus \text{tri}(S')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right),$$

é uma álgebra de Lie com parêntesis dado por:

$$\mathfrak{g}(S, S') = (\text{tri}(S) \oplus \text{tri}(S')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

- $\text{tri}(S) \oplus \text{tri}(S')$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}(S, S')$,
- $[(d_0, d_1, d_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(d_i(x) \otimes x'),$
- $[(d'_0, d'_1, d'_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(x \otimes d'_i(x')),$
- $[\iota_i(x \otimes x'), \iota_{i+1}(y \otimes y')] = \iota_{i+2}((x * y) \otimes (x' * y'))$ (índices modulo 3),
- $[\iota_i(x \otimes x'), \iota_i(y \otimes y')] = q'(x', y')\theta^i(t_{x,y}) + q(x, y)\theta^{i'}(t'_{x',y'}),$

onde $t_{x,y} = (q(x, \cdot)y - q(y, \cdot)x, \frac{1}{2}q(x, y)1 - r_x l_y, \frac{1}{2}q(x, y)1 - l_x r_y)$

$\theta : (d_0, d_1, d_2) \mapsto (d_2, d_0, d_1)$ é o automorfismo natural de ordem 3 em $\text{tri } S$.

Quadrado Mágico de Freudenthal (2004)

$g(S, S')$	1	2	4	8
1	A_1	A_2	C_3	F_4
2	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
4	C_3	A_5	D_6	E_7
8	F_4	E_6	E_7	E_8

($\text{car } k \neq 2, 3$)

Quadrado Mágico de Freudenthal (2004)

$g(S, S')$	1	2	4	8
1	A_1	A_2	C_3	F_4
2	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
4	C_3	A_5	D_6	E_7
8	F_4	E_6	E_7	E_8

(car $k \neq 2, 3$)

$g(S, S')$	1	2	4	8
1	A_1	$\tilde{A}_2$	C_3	F_4
2	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$	$\tilde{A}_5$	$\tilde{E}_6$
4	C_3	$\tilde{A}_5$	D_6	E_7
8	F_4	$\tilde{E}_6$	E_7	E_8

(car $k = 3$)

Quadrado Mágico de Freudenthal (2004)

$g(S, S')$	1	2	4	8
1	A_1	A_2	C_3	F_4
2	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
4	C_3	A_5	D_6	E_7
8	F_4	E_6	E_7	E_8

(car $k \neq 2, 3$)

$g(S, S')$	1	2	4	8
1	A_1	$\tilde{A}_2$	C_3	F_4
2	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$	$\tilde{A}_5$	$\tilde{E}_6$
4	C_3	$\tilde{A}_5$	D_6	E_7
8	F_4	$\tilde{E}_6$	E_7	E_8

(car $k = 3$)

- $\tilde{A}_2$ representa uma forma de $\mathfrak{pgl}_3$, portanto $[\tilde{A}_2, \tilde{A}_2]$ é uma forma de $\mathfrak{psl}_3$.
- $\tilde{A}_5$ representa uma forma de $\mathfrak{pgl}_6$, logo $[\tilde{A}_5, \tilde{A}_5]$ é uma forma de $\mathfrak{psl}_6$.
- $\tilde{E}_6$ não é simples, mas $[\tilde{E}_6, \tilde{E}_6]$ é um ideal simples de codimensão 1.

- 1 **Motivação**
 - Construções de álgebras de Lie
 - **Superização da construção de Elduque**
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 **Caracterização das superálgebras do Superquadrado**
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 **Superquadrado e Sistema Triplos**
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 **Últimos comentários**
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

Definição

Uma superálgebra $C = C_{\bar{0}} \oplus C_{\bar{1}}$, munida de uma superforma quadrática regular $q = (q_{\bar{0}}, b)$, diz-se uma **superálgebra de composição** se:

$$q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}}y_{\bar{0}}) = q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}})q_{\bar{0}}(y_{\bar{0}}),$$

$$b(x_{\bar{0}}y, x_{\bar{0}}z) = q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}})b(y, z) = b(yx_{\bar{0}}, zx_{\bar{0}}),$$

$$b(xy, zt) + (-1)^{|x||y|+|x||z|+|y||z|}b(zy, xt) = (-1)^{|y||z|}b(x, z)b(y, t),$$

As superálgebras de composição unitais designam-se por **superálgebras de Hurwitz**.

Se b verifica

$$b(xy, z) = b(x, yz)$$

C é uma **superálgebra de composição simétrica**.

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(1, 2) = k1 \oplus V$$

V , espaço vectorial de dimensão 2

$\langle \cdot | \cdot \rangle$, forma bilinear alternada não nula

$\text{car } k = 3$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(1, 2) = k1 \oplus V$$

V , espaço vectorial de dimensão 2

$\langle \cdot | \cdot \rangle$, forma bilinear alternada não nula

$\text{car } k = 3$

Produto supercomutativo:

- $1x = x1 = x$
- $uv = \langle u | v \rangle 1$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(1, 2) = k1 \oplus V$$

V , espaço vectorial de dimensão 2

$\langle \cdot | \cdot \rangle$, forma bilinear alternada não nula

$\text{car } k = 3$

Produto supercomutativo:

- $1x = x1 = x$
- $uv = \langle u | v \rangle 1$

Superforma quadrática:

- $q_{\bar{0}}(1) = 1$
- $b(u, v) = \langle u | v \rangle$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(1, 2) = k1 \oplus V$$

V , espaço vectorial de dimensão 2

$\langle \cdot | \cdot \rangle$, forma bilinear alternada não nula

$\text{car } k = 3$

Produto supercomutativo:

- $1x = x1 = x$
- $uv = \langle u | v \rangle 1$

Superforma quadrática:

- $q_{\bar{0}}(1) = 1$
- $b(u, v) = \langle u | v \rangle$

é uma superálgebra de Hurwitz.

$$S_{1,2}^\lambda = k1 \oplus V$$

$\{u, v\}$, base simplética de V e $\lambda \in k$

$$\varphi : 1 \mapsto 1, u \mapsto u + \lambda v, v \mapsto v$$

é um automorfismo de $B(1,2)$ tal que $\varphi^3 = 1$.

$S_{1,2}^\lambda = B(1,2)$ com a mesma norma e produto $x \bullet y = \varphi(\bar{x})\varphi^2(\bar{y})$ é uma **superálgebra de composição simétrica**.

Quando $\lambda = 0$, $S_{1,2}$ representa a para-Hurwitz associada a $B(1,2)$, com a mesma norma e produto

$$\begin{cases} 1 \bullet 1 = 1 \\ 1 \bullet w = w \bullet 1 = -w \\ z \bullet w = \langle z|w \rangle 1, \forall w, z \in V. \end{cases}$$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(4, 2) = \text{End}_k(V) \oplus V$$

k , V como atrás

$\text{End}_k(V)$, munido da involução simplética $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, $(\langle \varphi(u)|v \rangle = \langle u|\bar{\varphi}(v) \rangle)$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(4, 2) = \text{End}_k(V) \oplus V$$

k , V como atrás

$\text{End}_k(V)$, munido da involução simplética $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, $(\langle \varphi(u)|v \rangle = \langle u|\bar{\varphi}(v) \rangle)$

Multiplicação:

- a composição de aplicações em $\text{End}_k(V)$
- $v \cdot \varphi = \varphi(v) = \bar{\varphi} \cdot v$
- $u \cdot v = \langle \cdot | u \rangle v : w \mapsto \langle w | u \rangle v$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(4, 2) = \text{End}_k(V) \oplus V$$

k , V como atrás

$\text{End}_k(V)$, munido da involução simplética $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, ($\langle \varphi(u)|v \rangle = \langle u|\bar{\varphi}(v) \rangle$)

Multiplicação:

- a composição de aplicações em $\text{End}_k(V)$
- $v \cdot \varphi = \varphi(v) = \bar{\varphi} \cdot v$
- $u \cdot v = \langle \cdot | u \rangle v : w \mapsto \langle w | u \rangle v$

Norma:

- $q_{\bar{0}}(\varphi) = \det \varphi$
 $b(\varphi, \psi) = t(\varphi \circ \bar{\psi})$
- $b(u, v) = \langle u | v \rangle$

Superálgebras de Composição: Exemplos (Shestakov)

$$B(4, 2) = \text{End}_k(V) \oplus V$$

k , V como atrás

$\text{End}_k(V)$, munido da involução simplética $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, ($\langle \varphi(u)|v \rangle = \langle u|\bar{\varphi}(v) \rangle$)

Multiplicação:

- a composição de aplicações em $\text{End}_k(V)$
- $v \cdot \varphi = \varphi(v) = \bar{\varphi} \cdot v$
- $u \cdot v = \langle \cdot | u \rangle v : w \mapsto \langle w | u \rangle v$

Norma:

- $q_{\bar{0}}(\varphi) = \det \varphi$
 $b(\varphi, \psi) = t(\varphi \circ \bar{\psi})$
- $b(u, v) = \langle u | v \rangle$

$S_{4,2}$ representa a superálgebra para-Hurwitz associada com produto $x \bullet y = \bar{x}\bar{y}$.

$$\begin{aligned} V \otimes V &\longrightarrow \text{End}_k(V) \\ a \otimes b &\longmapsto \langle a | \cdot \rangle b : v \mapsto \langle a | v \rangle b \end{aligned}$$

$$S_{4,2} = V \otimes V \oplus V$$

$$\begin{aligned}
 V \otimes V &\longrightarrow \text{End}_k(V) \\
 a \otimes b &\longmapsto \langle a|\cdot\rangle b : v \mapsto \langle a|v\rangle b
 \end{aligned}$$

$$S_{4,2} = V \otimes V \oplus V$$

Produto:

- $x \otimes y \bullet z \otimes t = \langle y|z\rangle t \otimes x$
- $v \bullet x \otimes y = \langle y|v\rangle x$
- $x \otimes y \bullet v = -\langle x|v\rangle y$
- $u \bullet v = -u \otimes v$

$$\begin{aligned}
 V \otimes V &\longrightarrow \text{End}_k(V) \\
 a \otimes b &\longmapsto \langle a | \cdot \rangle b : v \mapsto \langle a | v \rangle b
 \end{aligned}$$

$$S_{4,2} = V \otimes V \oplus V$$

Produto:

- $x \otimes y \bullet z \otimes t = \langle y | z \rangle t \otimes x$
- $v \bullet x \otimes y = \langle y | v \rangle x$
- $x \otimes y \bullet v = -\langle x | v \rangle y$
- $u \bullet v = -u \otimes v$

Forma bilinear supersimétrica:

- $b(x \otimes y, z \otimes t) = \langle x | z \rangle \langle y | t \rangle$
- $b(u, v) = \langle u | v \rangle$
- $b(x \otimes y, v) = 0$

Teorema (Elduque, Okubo 02)

*Seja S uma superálgebra de composição simétrica sobre um corpo k .
Então, ou:*

- $S_{\bar{1}} = 0$.
- a característica de k é 2 e S é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$ - graduada.
- a característica de k é 3 e S isomorfa a $S_{1,2}^\lambda$ ou a $S_{4,2}$.

Classificação das superálgebras de composição simétrica

Teorema (Elduque, Okubo 02)

Seja S uma superálgebra de composição simétrica sobre um corpo k . Então, ou:

- $S_{\bar{1}} = 0$.
- a característica de k é 2 e S é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$ - graduada.
- a característica de k é 3 e S isomorfa a $S_{1,2}^\lambda$ ou a $S_{4,2}$.

Observação

A menos de um isomorfismo, $S_{1,2}^\lambda$ e $S_{4,2}$ esgotam as superálgebras de composição simétrica com parte ímpar não trivial.

As superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$

$(S, \bullet, q), (S', *, q')$, superálgebras de composição simétrica

As superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$

$(S, \bullet, q), (S', *, q')$, superálgebras de composição simétrica

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S')$, superálgebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - graduada

As superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$

$(S, \bullet, q), (S', *, q')$, superálgebras de composição simétrica

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S')$, superálgebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - graduada

$$\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{0})} = \text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')$$

$$\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})} = \mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})} = \mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})} = S \otimes S'$$

As superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$

$(S, \bullet, q), (S', *, q')$, superálgebras de composição simétrica

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S')$, superálgebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - graduada

$$\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{0})} = \text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')$$

$$\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})} = \mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})} = \mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})} = S \otimes S'$$

$\iota_i(x \otimes x')$, o elemento $x \otimes x'$ em $\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})}$ (resp. $\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})}, \mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})}$) se $i = 0$ (resp. $i = 1, 2$)

As superálgebras $\mathfrak{g}(S, S')$

$(S, \bullet, q), (S', *, q')$, superálgebras de composição simétrica

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S')$, superálgebra $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - graduada

$$\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{0})} = \text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')$$

$$\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})} = \mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})} = \mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})} = S \otimes S'$$

$\iota_i(x \otimes x')$, o elemento $x \otimes x'$ em $\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})}$ (resp. $\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})}$, $\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})}$) se $i = 0$ (resp. $i = 1, 2$)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S') = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

$$\mathfrak{g} = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

Produto superanticomutativo:

- $\text{tri}(S)$ e $\text{tri}(S')$ são subsuperálgebras de Lie, $[\text{tri}(S), \text{tri}(S')] = 0$

$$\mathfrak{g} = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

Produto superanticomutativo:

- $\text{tri}(S)$ e $\text{tri}(S')$ são subsuperálgebras de Lie, $[\text{tri}(S), \text{tri}(S')] = 0$
- $[(d_0, d_1, d_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(d_i(x) \otimes x')$

$$\mathfrak{g} = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

Produto superanticomutativo:

- $\text{tri}(S)$ e $\text{tri}(S')$ são subsuperálgebras de Lie, $[\text{tri}(S), \text{tri}(S')] = 0$
- $[(d_0, d_1, d_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(d_i(x) \otimes x')$
- $[(d'_0, d'_1, d'_2), \iota_i(x \otimes x')] = (-1)^{|d'_i||x|} \iota_i(x \otimes d'_i(x'))$

$$\mathfrak{g} = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

Produto superanticomutativo:

- $\text{tri}(S)$ e $\text{tri}(S')$ são subsuperálgebras de Lie, $[\text{tri}(S), \text{tri}(S')] = 0$
- $[(d_0, d_1, d_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(d_i(x) \otimes x')$
- $[(d'_0, d'_1, d'_2), \iota_i(x \otimes x')] = (-1)^{|d'_i||x|} \iota_i(x \otimes d'_i(x'))$
- $[\iota_i(x \otimes x'), \iota_{i+1}(y \otimes y')] = (-1)^{|x'|||y|} \iota_{i+2}((x \bullet y) \otimes (x' * y'))$ (índices modulo 3)

$$\mathfrak{g} = (\text{tri}(S, \bullet, q) \oplus \text{tri}(S', *, q')) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S \otimes S') \right)$$

Produto superanticomutativo:

- $\text{tri}(S)$ e $\text{tri}(S')$ são subsuperálgebras de Lie, $[\text{tri}(S), \text{tri}(S')] = 0$
- $[(d_0, d_1, d_2), \iota_i(x \otimes x')] = \iota_i(d_i(x) \otimes x')$
- $[(d'_0, d'_1, d'_2), \iota_i(x \otimes x')] = (-1)^{|d'_i||x|} \iota_i(x \otimes d'_i(x'))$
- $[\iota_i(x \otimes x'), \iota_{i+1}(y \otimes y')] = (-1)^{|x'||y|} \iota_{i+2}((x \bullet y) \otimes (x' * y'))$ (índices modulo 3)
- $[\iota_i(x \otimes x'), \iota_i(y \otimes y')]$
 $= (-1)^{|x|(|x'|+|y'|)+|y||y'|} b'(x', y') \theta^i(t_{x,y}) + (-1)^{|y||x'|} b(x, y) \theta'^i(t'_{x',y'})$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S, S')$$

- $\mathfrak{g}_j = (\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{0})})_j \oplus (\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{0})})_j \oplus (\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{1})})_j \oplus (\mathfrak{g}_{(\bar{1}, \bar{1})})_j$
 - $(\mathfrak{g}_{(\bar{0}, \bar{0})})_j = \text{tri}(S)_j \oplus \text{tri}(S')_j$
 - $(\iota_i(S \otimes S'))_j = \iota_i(S_{\bar{0}} \otimes S'_j) \oplus \iota_i(S_{\bar{1}} \otimes S'_{\bar{1}-j})$
- $j = \bar{0}, \bar{1}$, $i = 0, 1, 2$.

Teorema

$\mathfrak{g}(S, S')$ é uma superálgebra de Lie.

- 1 **Motivação**
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 **Caracterização das superálgebras do Superquadrado**
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 **Superquadrado e Sistema Triplos**
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 **Últimos comentários**
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

$$\mathfrak{g}(S, S') \simeq \mathfrak{g}(S_\varphi, S')$$

$(S, *, q)$, uma superálgebra de composição simétrica munida de um automorfismo φ de ordem 3.

$$\mathfrak{g}(S, S') \simeq \mathfrak{g}(S_\varphi, S')$$

$(S, *, q)$, uma superálgebra de composição simétrica munida de um automorfismo φ de ordem 3.

S_φ , a superálgebra de composição simétrica com a mesma norma e produto

$$x \star y = \varphi(x) * \varphi^2(y).$$

$$\mathfrak{g}(S, S') \simeq \mathfrak{g}(S_\varphi, S')$$

$(S, *, q)$, uma superálgebra de composição simétrica munida de um automorfismo φ de ordem 3.

S_φ , a superálgebra de composição simétrica com a mesma norma e produto

$$x \star y = \varphi(x) * \varphi^2(y).$$

Proposição

Sejam S e S' superálgebras de composição simétrica e φ um automorfismo de ordem 3 de S . As superálgebras de Lie $\mathfrak{g}(S, S')$ e $\mathfrak{g}(S_\varphi, S')$ são isomorfas.

$$\mathfrak{g}(S, S') \simeq \mathfrak{g}(S_\varphi, S')$$

$(S, *, q)$, uma superálgebra de composição simétrica munida de um automorfismo φ de ordem 3.

S_φ , a superálgebra de composição simétrica com a mesma norma e produto

$$x \star y = \varphi(x) * \varphi^2(y).$$

Proposição

Sejam S e S' superálgebras de composição simétrica e φ um automorfismo de ordem 3 de S . As superálgebras de Lie $\mathfrak{g}(S, S')$ e $\mathfrak{g}(S_\varphi, S')$ são isomorfas.

- Em característica 3,

$$\mathfrak{g}(S_{1,2}^\lambda, S') \simeq \mathfrak{g}(S_{1,2}, S')$$

Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-C.)

$g(S, S')$	S_1	S_2	S_4	S_8	$S_{1,2}$	$S_{4,2}$
S_1	A_1	$\tilde{A}_2$	C_3	F_4	(6,8)	(21,14)
S_2		$\tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_2$	$\tilde{A}_5$	$\tilde{E}_6$	(11,14)	(35,20)
S_4			D_6	E_7	(24,26)	(66,32)
S_8				E_8	(55,50)	(133,56)
$S_{1,2}$					(21,16)	(36,40)
$S_{4,2}$						(78,64)

1

Motivação

- Construções de álgebras de Lie
- Superização da construção de Elduque
- Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)

2

Caracterização das superálgebras do Superquadrado

- Superálgebras contragredientes
- Partes pares e partes ímpares

3

Superquadrado e Sistema Triplos

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos

4

Últimos comentários

- Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
- Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

1

Motivação

- Construções de álgebras de Lie
- Superização da construção de Elduque
- Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)

2

Caracterização das superálgebras do Superquadrado

- Superálgebras contragredientes
- Partes pares e partes ímpares

3

Superquadrado e Sistema Triplos

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos

4

Últimos comentários

- Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
- Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

Superálgebras de Lie contragredientes

$A = (a_{i,j})$ matriz $n \times n$ de elementos em k

Superálgebras de Lie contragredientes

$A = (a_{i,j})$ matriz $n \times n$ de elementos em k

- $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, uma **realização** de A
 - $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathfrak{h}^*$ (o dual do espaço vectorial $\mathfrak{h}$),
 - $\Pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathfrak{h}$,
 - $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$,
 - $\dim \mathfrak{h} = 2n - \text{rank } A$.

Superálgebras de Lie contragredientes

$A = (a_{i,j})$ matriz $n \times n$ de elementos em k

- $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, uma **realização** de A
 - $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathfrak{h}^*$ (o dual do espaço vectorial $\mathfrak{h}$),
 - $\Pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathfrak{h}$,
 - $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$,
 - $\dim \mathfrak{h} = 2n - \text{rank } A$.

$$\tau \subseteq \{1, \dots, n\}$$

- **Superálgebra de Lie local**

$$\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_1 = ke_1 \oplus \dots \oplus ke_n$, $\mathfrak{g}_{-1} = kf_1 \oplus \dots \oplus kf_n$
- $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$; $[h, h'] = 0$; $[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i$; $[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i$ (*)
 $i, j = 1, \dots, n$, $h, h' \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_0$ é par e e_i, f_i são pares se e só se $i \notin \tau$.

- Existe uma superálgebra de Lie $\mathbb{Z}$ -graduada minimal $\mathfrak{g}(A, \tau)$, **superálgebra de Lie contragrediente com matriz de Cartan A** , com parte local $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$.

$$\mathfrak{g}(A, \tau) = \tilde{\mathfrak{g}}(A, \tau)/\mathfrak{i}(A)$$

- $\tilde{\mathfrak{g}}(A, \tau)$, superálgebra de Lie livremente gerada por $\mathfrak{h}$ e $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$, munida com a $\mathbb{Z}$ -gradação induzida a partir da gradação em $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$
- $\mathfrak{i}(A)$, o ideal homogêneo maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A, \tau)$ que intersecta $\mathfrak{h}$ trivialmente.
- Seja Q o grupo abeliano livre de geradores $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Então $\mathfrak{g}(A, \tau)$ é Q -graduada fazendo $\deg e_i = \epsilon_i = -\deg f_i$, $i = 1, \dots, n$ e $\deg h = 0$, para qualquer $h \in \mathfrak{h}$.

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}(A, \tau)$$

Teorema

Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie $\mathbb{Z}$ -graduada gerada por $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e pelos elementos $e_i \in \mathfrak{g}_1$ e $f_i \in \mathfrak{g}_{-1}$, $i = 1, \dots, n$ pares (respectivamente, ímpares) se e só se $i \notin \tau$ (respectivamente, $i \in \tau$). Suponhamos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{g}_0^*$ e $h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{g}_0$ tais que

$$(\mathfrak{g}_0, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \{h_1, \dots, h_n\})$$

é uma realização de A e as relações $(*)$ são válidas.

Se qualquer ideal de $\mathfrak{g}$ homogêneo não nulo intersectar $\mathfrak{g}_0$ não trivialmente, então $\mathfrak{g}$ é isomorfa à superálgebra de Lie contragrediente $\mathfrak{g}(A, \tau)$.

$$\mathrm{tri} S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$

$$\mathrm{tri} S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$

$$\mathrm{tri} S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$

$$\mathrm{tri} S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$
- $\mathfrak{h} = kh_1 \oplus kh_2 \oplus kh_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{d}_{2,1}$

$$\text{tri } S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$
- $\mathfrak{h} = kh_1 \oplus kh_2 \oplus kh_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{d}_{2,1}$
- $\Phi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\pm 2\epsilon_i : i = 1, 2, 3\} \cup \{\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$

$$\text{tri } S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$
- $\mathfrak{h} = kh_1 \oplus kh_2 \oplus kh_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{d}_{2,1}$
- $\Phi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\pm 2\epsilon_i : i = 1, 2, 3\} \cup \{\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$
- $\Pi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\alpha_1 = 2\epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \alpha_3 = 2\epsilon_3\}$

$$\text{tri } S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, w_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$
- $\mathfrak{h} = kh_1 \oplus kh_2 \oplus kh_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{d}_{2,1}$
- $\Phi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\pm 2\epsilon_i : i = 1, 2, 3\} \cup \{\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$
- $\Pi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\alpha_1 = 2\epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \alpha_3 = 2\epsilon_3\}$
 $E_1 = e_2$, $E_2 = w_1 \otimes v_2 \otimes v_3$, $E_3 = e_3$,
- $F_1 = f_2$, $F_2 = -v_1 \otimes w_2 \otimes w_3$, $F_3 = f_3$,
 $H_1 = h_2$, $H_2 = h_1 - h_2 - h_3$, $H_3 = h_3$.

$$\text{tri } S_{4,2} \simeq \mathfrak{d}_{2,1} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sp}(V_3) \oplus V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

- $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$
- $\{v_i, w_i\}$ base simplética de V_i ; $h_i = \gamma_{v_i, w_i}$; $e_i = \gamma_{w_i, v_i}$; $f_i = -\gamma_{v_i, v_i}$
- $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$, $[e_i, f_i] = h_i$
- $\mathfrak{h} = kh_1 \oplus kh_2 \oplus kh_3$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{d}_{2,1}$
- $\Phi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\pm 2\epsilon_i : i = 1, 2, 3\} \cup \{\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$
- $\Pi_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \{\alpha_1 = 2\epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \alpha_3 = 2\epsilon_3\}$
 $E_1 = e_2$, $E_2 = w_1 \otimes v_2 \otimes v_3$, $E_3 = e_3$,
- $F_1 = f_2$, $F_2 = -v_1 \otimes w_2 \otimes w_3$, $F_3 = f_3$,
 $H_1 = h_2$, $H_2 = h_1 - h_2 - h_3$, $H_3 = h_3$.
- $(\mathfrak{h}, \{R(\alpha_1), R(\alpha_2), R(\alpha_3)\}, \{H_1, H_2, H_3\})$ é uma realização da matriz

$$A_{\mathfrak{d}_{2,1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \mathfrak{d}_{2,1} \simeq \mathfrak{g}(A_{\mathfrak{d}_{2,1}}, \{2\}).$$

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'(A, \tau)/\mathfrak{c}$$

Teorema

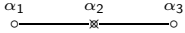
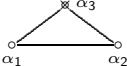
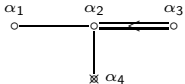
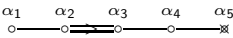
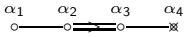
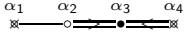
Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie Q -graduada gerada pelos elementos não nulos $\bar{e}_i \in \mathfrak{g}_{\epsilon_i}$, $\bar{f}_i \in \mathfrak{g}_{-\epsilon_i}$, $i = 1, \dots, n$, onde $\bar{e}_i, \bar{f}_i$ são pares (respectivamente, ímpares) se $i \notin \tau$ (respectivamente, $i \in \tau$). Suponha-se que:

- Se $\bar{h}_i = [\bar{e}_i, \bar{f}_i]$, $i = 1, \dots, n$, então $[\bar{h}_i, \bar{e}_j] = a_{ij}\bar{e}_j$, $[\bar{h}_i, \bar{f}_j] = -a_{ij}\bar{f}_j$, $[\bar{h}_i, \bar{h}_j] = 0$, $[\bar{e}_i, \bar{f}_j] = \delta_{ij}\bar{h}_i$, para quaisquer i, j .
- Qualquer ideal Q -homogéneo não nulo intersecta não trivialmente $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, com

$$\mathfrak{g}_m = \bigoplus \{\tilde{\mathfrak{g}}_q : q = m_1\epsilon_1 + \dots + m_n\epsilon_n, m_1 + \dots + m_n = m\}, \text{ para qualquer } m \in \mathbb{Z}.$$

Então $\mathfrak{g}$ é isomorfa à superálgebra de Lie contragrediente derivada sem centro $\mathfrak{g}'(A, \tau)/\mathfrak{c}$.

Superálgebras contragredientes, Matrizes de Cartan, Diagramas de Dynkin

	$A_{S_1, S_{1,2}}$	
$\mathfrak{g}(S_1, S_{1,2}) \simeq \mathfrak{g}'(A_{S_1, S_{1,2}}, \{2\})/\mathfrak{c}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(S_2, S_{1,2}) \simeq \mathfrak{g}(A_{S_2, S_{1,2}}, \{3\})/\mathfrak{c}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(S_4, S_{1,2}) \simeq \mathfrak{g}(A_{S_4, S_{1,2}}, \{4\})$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(S_8, S_{1,2}) \simeq \mathfrak{g}(A_{S_8, S_{1,2}}, \{5\})$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2}) \simeq \mathfrak{g}'(A_{S_{1,2}, S_{1,2}}, \{4\})/\mathfrak{c}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{4,2}) \simeq \mathfrak{g}(A_{S_{1,2}, S_{4,2}}, \{1, 3, 4\})$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

Superálgebras contragredientes, Matrices de Cartan, Diagramas de Dynkin

$\mathfrak{g}(S, S_{4,2}) \simeq$	$A_{S, S_{4,2}}$	
$\mathfrak{g}(A_{S_1, S_{4,2}}, \{2, 3\})$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(A_{S_2, S_{4,2}}, \{3, 5\}) / \mathfrak{c}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(A_{S_4, S_{4,2}}, \{4, 6\})$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(A_{S_8, S_{4,2}}, \{6, 7\})$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{g}(A_{S_{4,2}, S_{4,2}}, \{1, 2, 4, 6\})$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	



Sofiane Bouarroudj, Pavel Grozman and Dimitri Leites
*Cartan matrices and presentations of Cunha and Elduque
superalgebras*, preprint.

1

Motivação

- Construções de álgebras de Lie
- Superização da construção de Elduque
- Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)

2

Caracterização das superálgebras do Superquadrado

- Superálgebras contragredientes
- Partes pares e partes ímpares

3

Superquadrado e Sistema Triplos

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos

4

Últimos comentários

- Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
- Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

$\mathfrak{g}(S_1, S_{4,2})$

$$(\Phi_{S_1, S_{4,2}})_{\bar{0}} = \{\pm 2\epsilon_i, \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j : 1 \leq i < j \leq 3\}$$

$$(\Phi_{S_1, S_{4,2}})_{\bar{1}} = \{\pm \epsilon_i, \pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 : 1 \leq i \leq 3\}$$

$$\Pi_{\bar{0}} = \{\beta_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \beta_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \beta_3 = 2\epsilon_3\}$$

- $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}(S_1, S_{4,2})_{\bar{0}}$ é isomorfa à álgebra de Lie contragrediente com matriz de Cartan

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \simeq \mathfrak{sp}_6 = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$
- $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \simeq V(\omega_3) \simeq \ker \varphi$, com W módulo natural de dimensão 6 para $\mathfrak{sp}_6$

$$\varphi : \bigwedge^3 W \longrightarrow W$$

$$z_1 \wedge z_2 \wedge z_3 \longmapsto \{z_1|z_2\}z_3 + \{z_2|z_3\}z_1 + \{z_3|z_1\}z_2$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2})$$

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = (\mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2) \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus (V_1 \otimes V_2 \otimes \mathfrak{sl}_2)$$

$$\simeq \mathfrak{so}(\mathcal{V}, b), \text{ onde } \mathcal{V} = (V_1 \otimes V_2) \oplus Q_0$$

b é uma forma bilinear simétrica de índice de Witt maximal

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = (V_1 \oplus V_2) \otimes \mathfrak{gl}_2$$

$$= (V_1 \oplus V_2) \otimes (\mathfrak{j}_1 \oplus \mathfrak{j}_{-1})$$

$$= ((V_1 \oplus V_2) \otimes \mathfrak{j}_1) \oplus ((V_1 \oplus V_2) \otimes \mathfrak{j}_{-1})$$

$$\simeq 2 \text{ spin}_7$$

Superálgebras de Lie no Superquadrado Mágico de Freudenthal

	$S_{1,2}$	$S_{4,2}$
S_1	$\mathfrak{psl}_{2,2}$	$\mathfrak{sp}_6 \oplus (14)$
S_2	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{pgl}_3) \oplus ((2) \otimes \mathfrak{psl}_3)$	$\mathfrak{pgl}_6 \oplus (20)$
S_4	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_6) \oplus ((2) \otimes (13))$	$\mathfrak{so}_{12} \oplus \mathfrak{spin}_{12}$
S_8	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{f}_4) \oplus ((2) \otimes (25))$	$\mathfrak{e}_7 \oplus (56)$
$S_{1,2}$	$\mathfrak{so}_7 \oplus 2 \mathfrak{spin}_7$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$
$S_{4,2}$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$	$\mathfrak{so}_{13} \oplus \mathfrak{spin}_{13}$

Superálgebras de Lie no Superquadrado Mágico de Freudenthal

	$S_{1,2}$	$S_{4,2}$
S_1	$\mathfrak{psl}_{2,2}$	$\mathfrak{sp}_6 \oplus (14)$
S_2	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{pgl}_3) \oplus ((2) \otimes \mathfrak{psl}_3)$	$\mathfrak{pgl}_6 \oplus (20)$
S_4	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_6) \oplus ((2) \otimes (13))$	$\mathfrak{so}_{12} \oplus \mathfrak{spin}_{12}$
S_8	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{f}_4) \oplus ((2) \otimes (25))$	$\mathfrak{e}_7 \oplus (56)$
$S_{1,2}$	$\mathfrak{so}_7 \oplus 2 \mathfrak{spin}_7$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$
$S_{4,2}$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$	$\mathfrak{so}_{13} \oplus \mathfrak{spin}_{13}$

- Apenas $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_1) \simeq \mathfrak{psl}_{2,2}$ tem contrapartida na classificação de Kac, em característica 0.

Superálgebras de Lie no Superquadrado Mágico de Freudenthal

	$S_{1,2}$	$S_{4,2}$
S_1	$\mathfrak{psl}_{2,2}$	$\mathfrak{sp}_6 \oplus (14)$
S_2	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{pgl}_3) \oplus ((2) \otimes \mathfrak{psl}_3)$	$\mathfrak{pgl}_6 \oplus (20)$
S_4	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sp}_6) \oplus ((2) \otimes (13))$	$\mathfrak{so}_{12} \oplus \mathfrak{spin}_{12}$
S_8	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{f}_4) \oplus ((2) \otimes (25))$	$\mathfrak{e}_7 \oplus (56)$
$S_{1,2}$	$\mathfrak{so}_7 \oplus 2 \mathfrak{spin}_7$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$
$S_{4,2}$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$	$\mathfrak{so}_{13} \oplus \mathfrak{spin}_{13}$

- Apenas $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_1) \simeq \mathfrak{psl}_{2,2}$ tem contrapartida na classificação de Kac, em característica 0.
- Todas as outras superálgebras de Lie, com exceção de $\mathfrak{g}(S_2, S_{1,2})$ e $\mathfrak{g}(S_2, S_{4,2})$, que contêm um ideal simples de codimensão 1, são novas superálgebras de Lie simples específicas da característica 3.

1

Motivação

- Construções de álgebras de Lie
- Superização da construção de Elduque
- Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)

2

Caracterização das superálgebras do Superquadrado

- Superálgebras contragredientes
- Partes pares e partes ímpares

3

Superquadrado e Sistema Triplos

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos

4

Últimos comentários

- Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
- Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

1

Motivação

- Construções de álgebras de Lie
- Superização da construção de Elduque
- Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)

2

Caracterização das superálgebras do Superquadrado

- Superálgebras contragredientes
- Partes pares e partes ímpares

3

Superquadrado e Sistema Triplos

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos

4

Últimos comentários

- Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
- Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

$$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$$

S , álgebra para-Hurwitz

S , álgebra para-Hurwitz

$$J = H_3(\bar{S}, *) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & \bar{a}_2 & a_1 \\ a_2 & \alpha_1 & \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 & a_0 & \alpha_2 \end{pmatrix} : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in k, a_0, a_1, a_2 \in S \right\}$$
$$\simeq k^3 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right)$$

$$\mathfrak{g}(S_1, S) \simeq \text{der } J$$

S , álgebra para-Hurwitz

$$J = H_3(\bar{S}, *) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & \bar{a}_2 & a_1 \\ a_2 & \alpha_1 & \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 & a_0 & \alpha_2 \end{pmatrix} : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in k, a_0, a_1, a_2 \in S \right\}$$

$$\simeq k^3 \oplus (\oplus_{i=0}^2 \iota_i(S))$$

$$\mathfrak{g}(S_1, S) \simeq \text{der } J$$

Observação

Este isomorfismo estende-se a um isomorfismo de superálgebras de Lie, quando S é uma superálgebra para-Hurwitz, caso em que J é uma superálgebra de Jordan.

$$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S) \simeq (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathfrak{g}(S_1, S)) \oplus \left(V \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(V \otimes S) \right) \right)$$

$$\mathrm{tri} S_{1,2} = \{(d, d, d) : d \in \mathfrak{osp}(S_{1,2})\} \simeq \mathfrak{osp}(S_{1,2}) \simeq \mathfrak{sp} V \oplus V$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(S_{1,2}, S) &= (\mathrm{tri}(S_{1,2}) \oplus \mathrm{tri}(S)) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S_{1,2} \otimes S) \right) \\ &= (\mathfrak{sp} V \oplus V \oplus \mathrm{tri}(S)) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(1 \otimes S) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(V \otimes S) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(S_{1,2}, S)_{\bar{0}} &= \mathfrak{sp} V \oplus \mathrm{tri}(S) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right) \\ &\simeq \mathfrak{sp} V \oplus \mathrm{der} J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(S_{1,2}, S)_{\bar{1}} &= V \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(V \otimes S) \right) \\ &\simeq V \otimes \left(k \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right) \right) \end{aligned}$$

$$k \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right) \simeq J_0/k1 =: \hat{J}$$

$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e S.T.O

$$k \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right) \simeq J_0/k1 =: \hat{J}$$

Teorema

$$\begin{cases} \mathfrak{g}(S_{1,2}, S)_{\bar{0}} \simeq \mathfrak{sp}(V) \oplus \text{der } J \\ \mathfrak{g}(S_{1,2}, S)_{\bar{1}} \simeq V \otimes \hat{J}. \end{cases}$$

Então $\hat{J}$ é um **sistema triplo ortogonal** com produto triplo dado por:

$$[\hat{x}\hat{y}\hat{z}] = (x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z))^{\wedge}$$

$$(\hat{x} = x + k1)$$

Corolário (Elduque, C.)

A *superálgebra de Lie* $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ é a *superálgebra de Lie associada ao sistema triplo ortogonal* $\hat{J} = J_0/k1$, para $J = H_3(\bar{S})$.

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

S , álgebra para-Hurwitz

S , álgebra para-Hurwitz

V_i , o módulo natural para $\mathfrak{sp}(V_i)$ anulado por $\mathfrak{sp}(V_j)$ para $j \neq i$

S , álgebra para-Hurwitz

V_i , o módulo natural para $\mathfrak{sp}(V_i)$ anulado por $\mathfrak{sp}(V_j)$ para $j \neq i$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(S_4, S) \simeq & \bigoplus_{j=1}^3 \mathfrak{sp}(V_j) \oplus \text{tri } S \\ & \oplus (V_1 \otimes V_2) \otimes \iota_0(S) \oplus (V_2 \otimes V_3) \otimes \iota_1(S) \oplus (V_1 \otimes V_3) \otimes \iota_2(S) \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e S.T.S

S , álgebra para-Hurwitz

V_i , o módulo natural para $\mathfrak{sp}(V_i)$ anulado por $\mathfrak{sp}(V_j)$ para $j \neq i$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_4, S) \simeq & \oplus_{j=1}^3 \mathfrak{sp}(V_j) \oplus \text{tri } S \\ & \oplus (V_1 \otimes V_2) \otimes \iota_0(S) \oplus (V_2 \otimes V_3) \otimes \iota_1(S) \oplus (V_1 \otimes V_3) \otimes \iota_2(S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_8, S) \simeq & \oplus_{j=1}^4 \mathfrak{sp}(V_j) \oplus (\otimes_{j=1}^4 V_j) \oplus \text{tri } S \\ & \oplus ((V_1 \otimes V_2) \oplus (V_3 \otimes V_4)) \otimes \iota_0(S) \\ & \oplus ((V_2 \otimes V_3) \oplus (V_1 \otimes V_4)) \otimes \iota_1(S) \\ & \oplus ((V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_4)) \otimes \iota_2(S)\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e S.T.S

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_8, S) &\simeq \mathfrak{sp}(V_4) \oplus \mathfrak{g}(S_4, S) \\ &\oplus V_4 \otimes ((V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \\ &\oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S)))\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e S.T.S

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_8, S) &\simeq \mathfrak{sp}(V_4) \oplus \mathfrak{g}(S_4, S) \\ &\oplus V_4 \otimes ((V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \\ &\oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_{4,2}, S) &\simeq \bigoplus_{j=1}^3 \mathfrak{sp}(V_j) \oplus (\bigotimes_{j=1}^3 V_j) \oplus \text{tri}(S) \\ &\oplus ((V_1 \otimes V_2) \oplus V_3) \otimes \iota_0(S) \\ &\oplus ((V_2 \otimes V_3) \oplus V_1) \otimes \iota_1(S) \\ &\oplus ((V_1 \otimes V_3) \oplus V_2) \otimes \iota_2(S)\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e S.T.S

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_8, S) &\simeq \mathfrak{sp}(V_4) \oplus \mathfrak{g}(S_4, S) \\ &\quad \oplus V_4 \otimes ((V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \\ &\quad \oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_{4,2}, S) &\simeq \bigoplus_{j=1}^3 \mathfrak{sp}(V_j) \oplus (\bigotimes_{j=1}^3 V_j) \oplus \text{tri}(S) \\ &\quad \oplus ((V_1 \otimes V_2) \oplus V_3) \otimes \iota_0(S) \\ &\quad \oplus ((V_2 \otimes V_3) \oplus V_1) \otimes \iota_1(S) \\ &\quad \oplus ((V_1 \otimes V_3) \oplus V_2) \otimes \iota_2(S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(S_{4,2}, S) &\simeq \mathfrak{g}(S_4, S) \\ &\quad \oplus (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \\ &\quad \oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S))\end{aligned}$$

Corolário (Elduque, C.)

Seja S uma álgebra para-Hurwitz. Então:

Corolário (Elduque, C.)

Seja S uma álgebra para-Hurwitz. Então:

- $T = (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S))$ é um sistema triplo simplético.

Corolário (Elduque, C.)

Seja S uma álgebra para-Hurwitz. Então:

- $T = (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S))$ é um sistema triplo simplético.
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S) \simeq \text{index } T \oplus T$ é a superálgebra de Lie associada a este sistema triplo.

Corolário (Elduque, C.)

Seja S uma álgebra para-Hurwitz. Então:

- $T = (V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \oplus (V_3 \otimes \iota_0(S)) \oplus (V_1 \otimes \iota_1(S)) \oplus (V_2 \otimes \iota_2(S))$ é um sistema triplo simplético.
- $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S) \simeq \text{index } T \oplus T$ é a superálgebra de Lie associada a este sistema triplo.

Observação

$$T \simeq \begin{pmatrix} k & J \\ J & k \end{pmatrix}, \quad J = H_3(\bar{S}) \simeq k^3 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 \iota_i(S) \right).$$

$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$, $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos

	S_1	S_2	S_4	S_8
$S_{1,2}$	Superálgebras de Lie associadas a sistemas triplos ortogonais $\hat{J} = J_0/k1$			
$S_{4,2}$	Superálgebras de Lie associadas a sistemas triplos simpléticos $\begin{pmatrix} k & J \\ J & k \end{pmatrix}$			

(J é uma álgebra de Jordan central simples de grau 3)

$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$, $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos

	S_1	S_2	S_4	S_8
$S_{1,2}$	Superálgebras de Lie associadas a sistemas triplos ortogonais $\hat{J} = J_0/k1$			
$S_{4,2}$	Superálgebras de Lie associadas a sistemas triplos simpléticos $\begin{pmatrix} k & J \\ J & k \end{pmatrix}$			

(J é uma álgebra de Jordan central simples de grau 3)

- As superálgebras de Lie $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2})$ e $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{4,2})$ estão relacionadas com certos **sistemas triplos ortosimpléticos** (Elduque, C.).
- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2})$ está também relacionada com um sistema triplo ortogonal nulo.

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

Linhas do Superquadrado

$\mathfrak{g}(S_1, S)$	$\mathfrak{der} H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_2, S)$	$J_0 \oplus \mathfrak{der} J \simeq \mathfrak{str}_0 H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_4, S)$	$(Q_0 \otimes J) \oplus \mathfrak{der} J \simeq TKK(H_3(S)) \simeq \mathfrak{con} H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{der} H_3(S)) \oplus V \otimes W$
$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$	$\mathfrak{con} H_3(S) \oplus W$

S , (super)álgebra de composição, $H_3(S)$ (super)álgebra de Jordan, W (super)módulo.

Linhas do Superquadrado

$\mathfrak{g}(S_1, S)$	$\mathrm{der} H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_2, S)$	$J_0 \oplus \mathrm{der} J \simeq \mathfrak{str}_0 H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_4, S)$	$(Q_0 \otimes J) \oplus \mathrm{der} J \simeq \mathcal{T}KK(H_3(S)) \simeq \mathrm{con} H_3(S)$
$\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$	$(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathrm{der} H_3(S)) \oplus V \otimes W$
$\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$	$\mathrm{con} H_3(S) \oplus W$

S , (super)álgebra de composição, $H_3(S)$ (super)álgebra de Jordan, W (super)módulo.

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2}) \simeq \mathcal{T}KK(K_9)$, sendo $K_9 = K_3 \otimes K_3$ e $K_3 = K_{\bar{0}} \oplus K_{\bar{1}}$, com $K_{\bar{0}} = ke$, $K_{\bar{1}} = kx + ky$ com multiplicação:

$$e^2 = e, \quad ex = \frac{1}{2}x = xe, \quad ey = \frac{1}{2}y = ye, \quad xy = e = -yx, \quad x^2 = 0 = y^2.$$

- $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_1) \simeq \mathcal{T}KK(K_3) \simeq \mathfrak{psl}_{2,2}$.

- 1 Motivação
 - Construções de álgebras de Lie
 - Superização da construção de Elduque
 - Superquadrado Mágico de Freudenthal (Elduque-Cunha)
- 2 Caracterização das superálgebras do Superquadrado
 - Superálgebras contragredientes
 - Partes pares e partes ímpares
- 3 Superquadrado e Sistema Triplos
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S)$ e Sistemas Triplos Ortogonais
 - $\mathfrak{g}(S_{4,2}, S)$ e Sistemas Triplos Simpléticos
- 4 Últimos comentários
 - Estruturas de composição, de Jordan e de Lie
 - Novas Superálgebras de Lie em Característica 3

- O feito mais notável desta construção é que, com exceção da superálgebra $\mathfrak{psl}_{2,2}$, nenhuma das superálgebras simples que aparecem nas últimas colunas tem contrapartida na classificação de Kac em característica 0. Este trabalho mostra pois numerosos exemplos de situações excepcionais em característica 3:
 - $\mathfrak{g}(S_r, S_{1,2})(r = 4, 8), [\mathfrak{g}(S_2, S_{1,2}), \mathfrak{g}(S_2, S_{1,2})]$
 - $\mathfrak{g}(S_r, S_{4,2})(r = 1, 4, 8), [\mathfrak{g}(S_2, S_{4,2}), \mathfrak{g}(S_2, S_{4,2})]$
 - $\mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{4,2}), \mathfrak{g}(S_{1,2}, S_{1,2}), \mathfrak{g}(S_{4,2}, S_{4,2})$

Referências Bibliográficas

-  Alberto Elduque, *New simple Lie superalgebras in characteristic 3*, J. Algebra 296 (2006), 196-233.
-  Alberto Elduque, *Some new simple modular Lie superalgebras*, Pacific J. Math. 231 (2007), no. 2, 337-359.
-  Alberto Elduque, *The Tits construction and some simple Lie superalgebras in characteristic 3*, preprint, arXiv:math.RA/0703784.
-  Isabel Cunha and Alberto Elduque, *An extended Freudenthal Magic Square in characteristic 3*, J. Algebra 317 (2007), 471-509.
-  Isabel Cunha and Alberto Elduque, *The extended Freudenthal Magic Square and Jordan Algebras*, manuscripta math. 123 (2007), no. 3, 325-351.
-  Isabel Cunha, *Extensão do Quadrado Mágico de Freudenthal em Característica 3*, Tese de Doutorado, UBI, 2006.

Superquadrado Mágico de Freudenthal em Característica 3

$\mathfrak{g}(S, S')$	S_1	S_2	S_4	S_8	$S_{1,2}$	$S_{4,2}$
S_1	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathfrak{pgl}_3$	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{psl}_{2,2}$	$\mathfrak{sp}_6 \oplus (14)$
S_2		$\mathfrak{pgl}_3 \oplus \mathfrak{pgl}_3$	$\mathfrak{pgl}_6$	$\tilde{\mathfrak{e}}_6$	$(\mathfrak{pgl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus (\mathfrak{psl}_3 \otimes (2))$	$\mathfrak{pgl}_6 \oplus (20)$
S_4			$\mathfrak{so}_{12}$	$\mathfrak{e}_7$	$(\mathfrak{sp}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus ((13) \otimes (2))$	$\mathfrak{so}_{12} \oplus \mathfrak{spin}_{12}$
S_8				$\mathfrak{e}_8$	$(\mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus ((25) \otimes (2))$	$\mathfrak{e}_7 \oplus (56)$
$S_{1,2}$					$\mathfrak{so}_7 \oplus 2 \mathfrak{spin}_7$	$\mathfrak{sp}_8 \oplus (40)$
$S_{4,2}$						$\mathfrak{so}_{13} \oplus \mathfrak{spin}_{13}$

Muito obrigada!