Hipergrupos: do choque de partículas à soma de operadores auto-adjuntos

João Filipe Queiró

Universidade de Coimbra

Tarde de Trabalho SPM/CIM

16 Dezembro 2006

N. Wildberger, *Algebraic structures associated to group actions and sums of Hermitian matrices*, Textos de Matemática, Coimbra, 2001.

W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bulletin AMS 37 (2000), 209-249.

$$\mathcal{K} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$$

$$\begin{tikzcd} c_i \arrow[dr] & & c_j \arrow[dl] \\ & ? & \end{tikzcd}$$

? $=$ c_k com probabilidade n_{ij}^k

Formalmente,

$$c_i * c_j = \sum_{k=0}^{n} n_{ij}^k \, c_k$$

com $n_{ij}^k \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n_{ij}^k = 1$. $\mathbb{C}\mathcal{K}$, axiomas adicionais

Caso numerável, caso contínuo

Alguns problemas clássicos

1. Valores próprios da soma de matrizes hermíticas

Dados dois espectros reais α e β, quais são os possíveis espectros γ de somas $A+B$, onde A e B são matrizes hermíticas $n\times n$ com espectros α e β, respectivamente?

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \qquad \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$$

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \qquad \gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$$

$$E(\alpha, \beta)$$

Relações triviais:

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n$$

$$(\text{porque} \quad \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B)$$

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$$

$$(\text{porque} \quad \alpha_1 = \max_{\|x\|=1} x^* A x, \quad \text{etc.})$$

Reformulação do problema:

U_n actua sobre $\mathcal{H}_n$ por $A \longrightarrow UAU^*$. As órbitas desta acção são as classes $\mathcal{O}_\alpha$ de matrizes hermíticas unitariamente semelhantes.

Pretendemos descrever $\mathcal{O}_\alpha + \mathcal{O}_\beta$.

$\mathcal{O}_\alpha + \mathcal{O}_\beta$ é U_n-invariante, e portanto

$$\mathcal{O}_\alpha + \mathcal{O}_\beta = \bigcup_\gamma \mathcal{O}_\gamma\,.$$

O problema é então: que órbitas $\mathcal{O}_\gamma$ ocorrem nesta união?

2. Valores singulares do produto de matrizes complexas

(só matrizes quadradas)

Valores singulares de $A =$ valores próprios de $\sqrt{A^*A}$ (hermítica ≥ 0)

Dados α e β (≥ 0), quais são os possíveis "espectros singulares" γ de produtos AB, onde A e B são matrizes complexas com espectros singulares α e β, respectivamente?

$$S(\alpha, \beta)$$

Relações triviais:

$$\gamma_1 \cdots \gamma_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_n$$

(porque $|\det(AB)| = |\det(A)|.|\det(B)|$)

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 \beta_1$$

(porque $\alpha_1 = \|A\|$, etc.)

3. Produto tensorial de representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$

(ou de U_n)

V_α e V_β duas representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$, $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$

$$V_\alpha \otimes V_\beta \cong \bigoplus_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta} V_\gamma$$

Quando é que V_γ ocorre em $V_\alpha \otimes V_\beta$?

Por outras palavras, quando é que $c^\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$?

$$P(\alpha, \beta)$$

4. Produto de polinómios de Schur

$$s_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\det\left[x_i^{\alpha_j+n-j}\right]}{\det\left[x_i^{n-j}\right]}\ , \quad 0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}^n$$

No anel dos polinómios simétricos em $x_1, \ldots, x_n$,

$$s_\alpha \cdot s_\beta = \sum_\gamma d_{\alpha\beta}^\gamma s_\gamma$$

Quando é que s_γ ocorre em $s_\alpha \cdot s_\beta$?

Por outras palavras, quando é que $d_{\alpha\beta}^\gamma \neq 0$?

5. Factores invariantes do produto

R um domínio de ideais principais. Só matrizes quadradas.

Factores invariantes de A: $a_k = \dfrac{d_{n-k+1}(A)}{d_{n-k}(A)}$

Dados $a_n|\dots|a_1$, $b_n|\dots|b_1$, quais são os possíveis factores invariantes $c_n|\dots|c_1$ de produtos AB, onde A e B são matrizes sobre R (s.p.g. não-singulares) com factores invariantes $a_n|\dots|a_1$ e $b_n|\dots|b_1$, respectivamente?

Relações triviais:

$$a_n b_n | c_n \quad , \qquad c_1 \cdots c_n = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n$$

6. Extensões de módulos

R de novo um domínio de ideais principais

Dados $c_n|\ldots|c_1$, $b_n|\ldots|b_1$ e $a_n|\ldots|a_1$, quando é que estas são as sequências de factores invariantes de R-módulos de torsão finitamente gerados $\mathcal{C}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}/\mathcal{B}$?

$$0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to \mathcal{A} \to 0$$

Todos estes problemas estão resolvidos...

… e são "o mesmo"

1. Valores próprios da soma de matrizes hermíticas
2. Valores singulares do produto de matrizes complexas
3. Produto tensorial de representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$
4. Produto de polinómios de Schur
5. Factores invariantes do produto
6. Extensões de módulos

Relação entre os problemas 1 e 2

S.p.g. $\alpha, \beta > 0$

$$S(\alpha, \beta) = e^{E(\log \alpha, \log \beta)}$$

(a relação que se obteria se $e^H e^K = e^{H+K}$)

A. Klyachko - 2000 (não trivial)

Relação entre os problemas 3 e 4

s_α é o carácter de V_α

$s_\alpha \cdot s_\beta$ é o carácter de $V_\alpha \otimes V_\beta$

O carácter de $\bigoplus$ é $\sum$

$$d_{\alpha\beta}^{\gamma} = c_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

$\therefore$ trivial

Relação entre os problemas 5 e 6

$$\text{Módulos} \longleftrightarrow \text{Matrizes}$$

R. Thompson - anos 80 (não muito difícil)

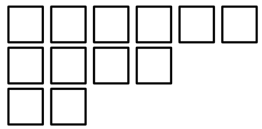
Solução do problema 3 (e 4):

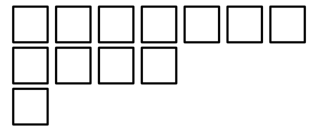
$$P(\alpha, \beta) = LR(\alpha, \beta)$$

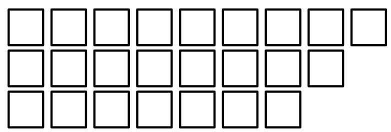
(clássico)

A regra de Littlewood-Richardson

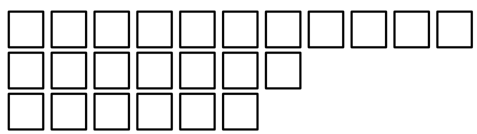
$\alpha = (6, 4, 2)$ $\qquad$ $\beta = (7, 4, 1)$



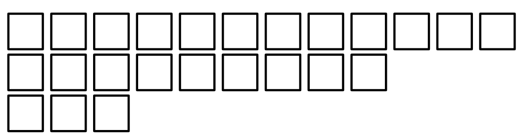




$(9, 8, 7)$



$(11, 7, 6)$



$(12, 9, 3)$

$(\ldots)$

$$LR(\alpha, \beta)$$

No exemplo,

$$\begin{aligned} LR(\alpha,\beta) \;=\; & \{(10,10,4),(11,10,3),(9,9,6),(10,9,5),(11,9,4), \\ & (12,9,3),(9,8,7),(10,8,6),(11,8,5), \\ & (12,8,4),(13,8,3),(10,7,7),(11,7,6), \\ & (12,7,5),(13,7,4),(12,6,6),(13,6,5)\} \end{aligned}$$

Reformulação do problema dos factores invariantes do produto

O problema é **localizável**: para cada primo fixo $p \in R$, podemos restringir-nos a matrizes sobre o domínio local R_p, *i.e.* trabalhar apenas com potências de p.

$$a_i \rightarrow p^{\alpha_i} \ , \ b_i \rightarrow p^{\beta_i} \ , \ c_i \rightarrow p^{\gamma_i}$$

$$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \ , \ \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n \ , \ \gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n \quad \text{(inteiros} \geq 0\text{)}$$

$$I(\alpha, \beta)$$

Solução do problema 5 (e 6):

$$I(\alpha, \beta) = LR(\alpha, \beta)$$

T. Klein - 1968 (não trivial)

1. Valores próprios da soma de matrizes hermíticas

2. Valores singulares do produto de matrizes complexas

3. Produto tensorial de representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$

4. Produto de polinómios de Schur

5. Factores invariantes do produto (versão local)

6. Extensões de módulos (versão local)

Relação entre os problemas 1 e 3

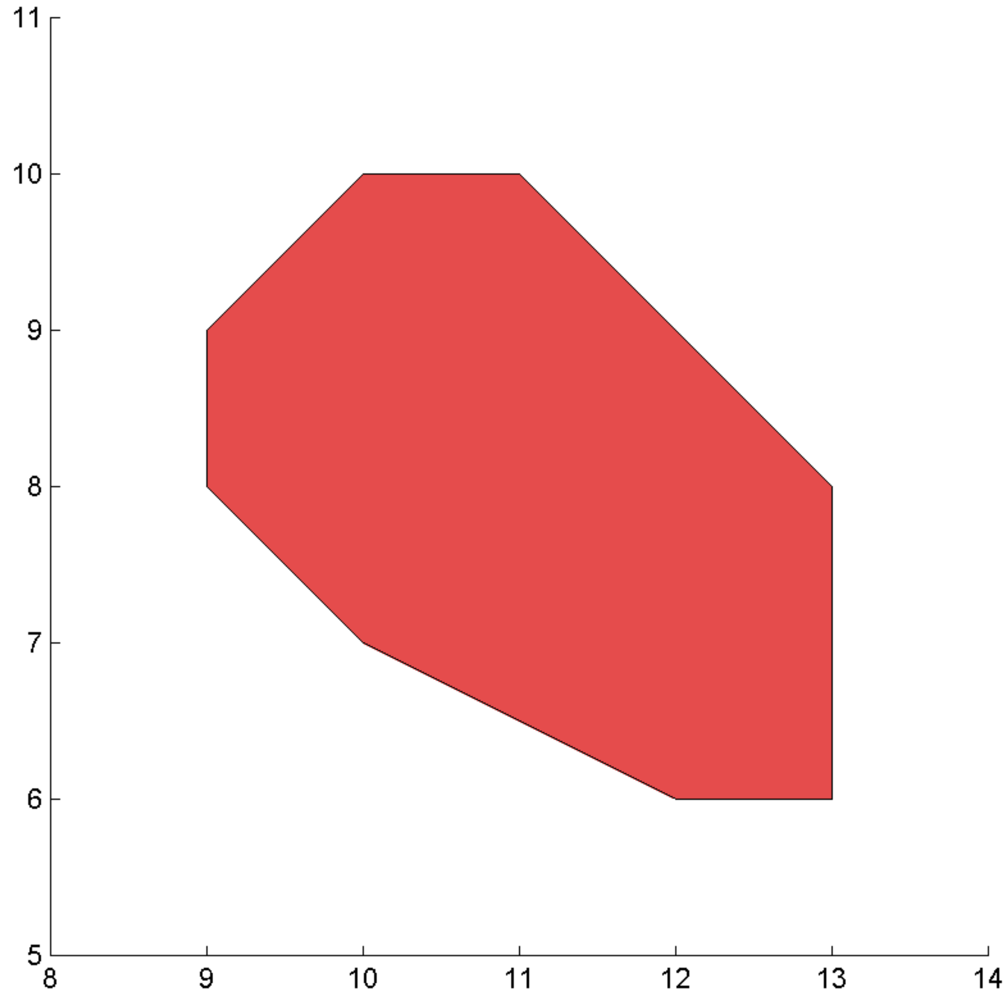
1. Valores próprios da soma de matrizes hermíticas

3. Produto tensorial de representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$

Exemplo: $\alpha = (6,4,2)\,,\ \beta = (7,4,1)$

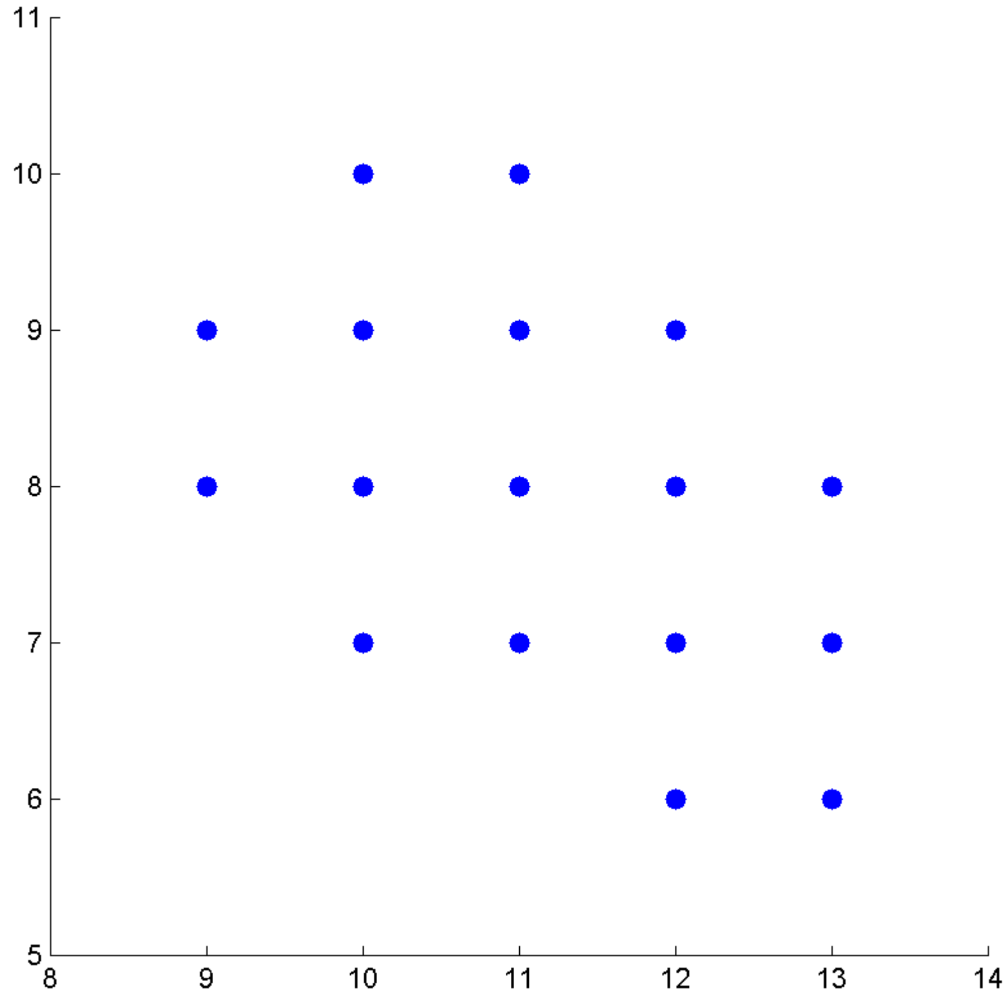
$$
\begin{aligned}
E(\alpha,\beta) \;=\; & \{(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) : \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3, \\
& \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 24, \\
& \gamma_1 \leq 13, \gamma_2 \leq 10, \gamma_3 \leq 7, \\
& \gamma_1 + \gamma_2 \leq 21, \gamma_1 + \gamma_3 \leq 18, \gamma_2 + \gamma_3 \leq 15\}
\end{aligned}
$$

$E(\alpha, \beta)$

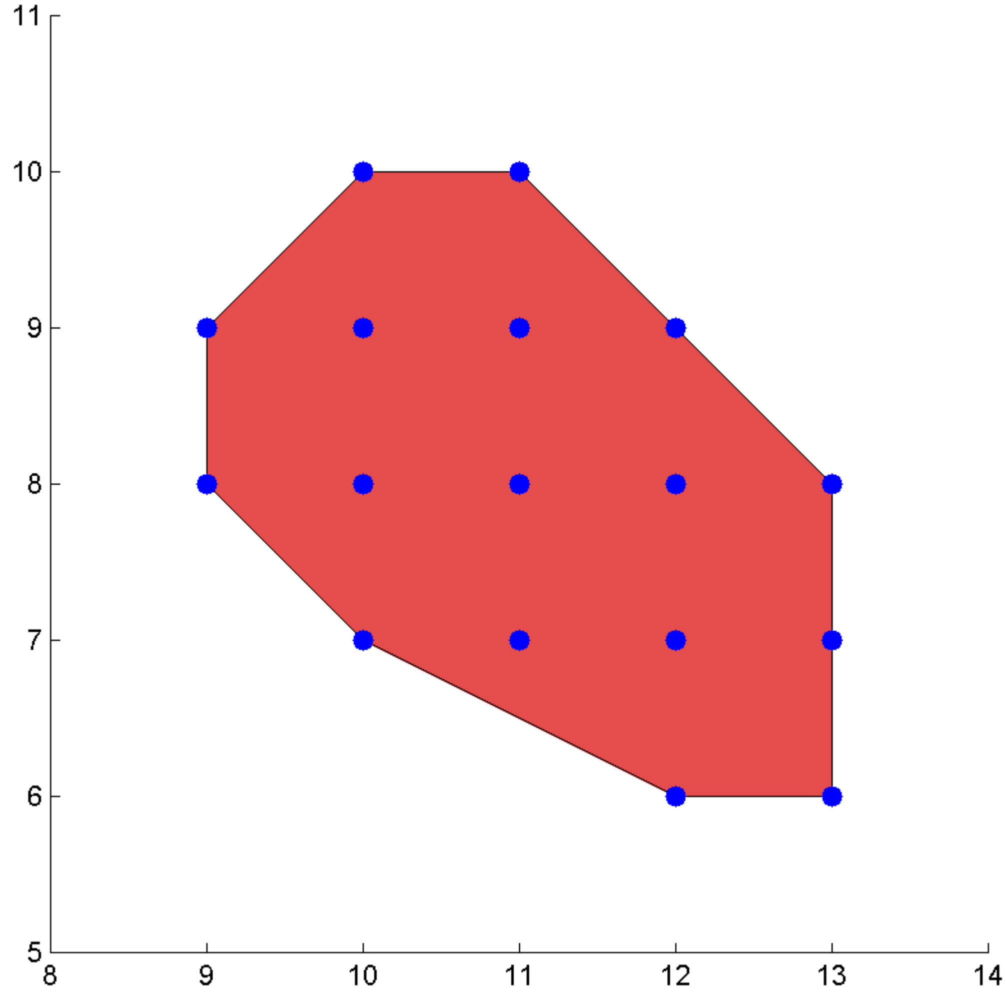


$$
\begin{aligned}
LR(\alpha,\beta) \;=\;& \{(10,10,4),(11,10,3),(9,9,6),(10,9,5),(11,9,4),\\
& (12,9,3),(9,8,7),(10,8,6),(11,8,5),\\
& (12,8,4),(13,8,3),(10,7,7),(11,7,6),\\
& (12,7,5),(13,7,4),(12,6,6),(13,6,5)\}
\end{aligned}
$$

$LR(\alpha, \beta)$



$$E(\alpha, \beta) \;\; \& \;\; LR(\alpha, \beta)$$



$0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$

$$E(\alpha, \beta) \cap \mathbb{Z}^n = LR(\alpha, \beta)$$

Demonstração?

$$E(\alpha,\beta)\cap\mathbb{Z}^n \;\supseteq\; LR(\alpha,\beta)$$

A.P.Santana, J.Q., E.M.Sá - 1999

$$\gamma \in E(\alpha,\beta) \iff \exists_N \; N\gamma \in LR(N\alpha, N\beta)$$

A.Klyachko - 1998

$$\exists_N \;\; N\gamma \in LR(N\alpha, N\beta) \;\Rightarrow\; \gamma \in LR(\alpha, \beta)$$

A.Knutson, T.Tao - 1999

(não trivial!)

A equivalência

$$\gamma \in E(\alpha,\beta) \iff \exists_N \; N\gamma \in LR(N\alpha, N\beta)$$

também se deduz de um resultado de F. Kirwan ($\leq$1994) sobre quocientes geométricos e quocientes simplécticos (Knutson - 2000)

Descrição de $E(\alpha,\beta)$ (e de $LR(\alpha,\beta)$) por desigualdades

Para $I = (i_1, \ldots, i_r)$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ definamos

$$\lambda(I) = (i_r - r, \ldots, i_2 - 2, i_1 - 1)$$

$$\gamma \in E(\alpha,\beta) \iff \begin{cases} \Sigma\,\gamma = \Sigma\,\alpha + \Sigma\,\beta\,, \\ \Sigma\,\gamma_K \leq \Sigma\,\alpha_I + \Sigma\,\beta_J \text{ sempre que} \\ \quad \lambda(K) \in E[\lambda(I), \lambda(J)]\,,\ 1 \leq r < n \end{cases}$$

(K+KT; conjectura A.Horn, 1962; descrição recursiva; não trivial!)

Soluções completas para $n = 1, 2, 3$

n=1

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

n=2

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$$

$$\gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2$$

$$\gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$$

n=3

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$$
$$\gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2$$
$$\gamma_3 \leq \alpha_1 + \beta_3$$
$$\gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1$$
$$\gamma_3 \leq \alpha_2 + \beta_2$$
$$\gamma_3 \leq \alpha_3 + \beta_1$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$$
$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3$$
$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

À parte a igualdade do traço,

$$\text{para } n = 2, \quad 3 \text{ desigualdades}$$

$$\text{para } n = 3, \quad 12 \text{ desigualdades}$$

$$\text{para } n = 4, \quad 41 \text{ desigualdades}$$

$$\text{para } n = 5, \quad 142 \text{ desigualdades}$$

$$\text{para } n = 6, \quad 522 \text{ desigualdades}$$

As desigualdades “essenciais” :

Belkale - 2000,   Knutson, Tao, Woodward - 2001

(relação com multiplicidades de Littlewood-Richardson)

Para $n \leq 5$ não há desigualdades a mais.

A igualdade

$$E(\alpha, \beta) \cap \mathbb{Z}^n = LR(\alpha, \beta)$$

sugere uma correspondência profunda entre órbitas $\mathcal{O}_\lambda$

e representações irredutíveis V_λ

F. Kirwan

O programa de Kirillov para grupos de Lie:

Representações irredutíveis

$$\updownarrow$$

Órbitas (co)adjuntas

devendo ter-se:

Restrição de representações irredutíveis de G a um subgrupo K

$$\updownarrow$$

Projecção de órbitas em $\mathfrak{g}$ nas correspondentes em $\mathfrak{k}$

("functorialidade" do método das órbitas)

A.Kirillov, Bulletin AMS - 1999

Aplicação ao caso de U_n

μ_λ medida de probabilidade na órbita $\mathcal{O}_\lambda$, $S \in i\mathcal{H}_n$, $U = e^S$

Fórmula de Kirillov:

$$s_\lambda(U) = \frac{1}{j(S)}\,\mu^\vee_{\lambda+\delta}(S)$$

onde $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, $\vee$ designa a transformada de Fourier inversa e $j(S)$ é uma certa função $\neq 0$ satisfazendo $j^\wedge = \mu_\delta$

Correspondência entre representações irredutíveis V_λ e órbitas $\mathcal{O}_{\lambda+\delta}$

As medidas μ_λ formam um hipergrupo para a convolução.

$$\mathrm{supp}(\mu_\lambda * \mu_\nu) = \mathrm{supp}(\mu_\lambda) + \mathrm{supp}(\mu_\nu) = \mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\nu$$

$$s_\alpha \cdot s_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma s_\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{\alpha+\delta}^\vee \mu_{\beta+\delta}^\vee = j \cdot \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma \mu_{\gamma+\delta}^\vee$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu_{\alpha+\delta} * \mu_{\beta+\delta} = \mu_\delta * \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma \mu_{\gamma+\delta}$$

A.Dooley, J.Repka, N.Wildberger, 1993

Dará uma outra demonstração de $E(\alpha,\beta)\cap\mathbb{Z}^n = LR(\alpha,\beta)$?

(ou pelo menos de $\subseteq$)

$$
\begin{aligned}
\gamma \in E(\alpha+\delta,\beta+\delta) \quad &\iff \quad \mathcal{O}_\gamma \text{ ocorre em } \mathcal{O}_{\alpha+\delta}+\mathcal{O}_{\beta+\delta} \\
&\iff \quad \mathcal{O}_\gamma \text{ ocorre em } \operatorname{supp}(\mu_{\alpha+\delta}*\mu_{\beta+\delta}) \\
&\iff \quad \mathcal{O}_\gamma \text{ ocorre em } \operatorname{supp}\left(\sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(\mu_\delta*\mu_{\gamma+\delta}\right)\right)
\end{aligned}
$$