Dimensão de Hausdorff em Sistemas Dinâmicos

Nuno LUZIA

(nluzia@math.ist.utl.pt)

ABSTRACT

Nesta exposição colocamos o problema de calcular a *Dimensão de Hausdorff* de conjuntos gerados por sistemas dinâmicos, *fractais*. Em dimensão 1, pelo menos no caso *uniformemente expansor*, este problema foi resolvido por Sinai-Ruelle-Bowen usando o *Formalismo Termodinâmico*. Em dimensão 2, o problema de calcular a dimensão de Hausdorff complica-se devido à existencia de diferentes taxas de expansão. Mostramos aqui resultados parciais nesta direcção bem como uma contribuição do autor.

Dimension 2

1) Bedford/McMullen (1984)

Fórmula para DH para *tapetes de Sierpinski*:

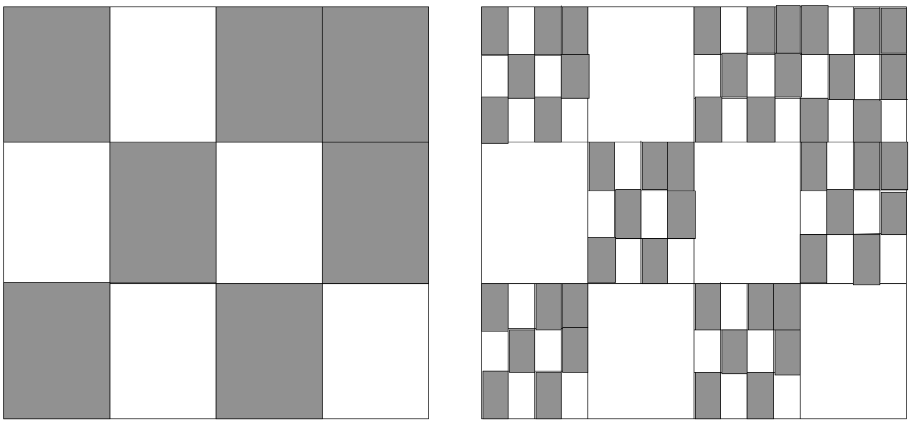


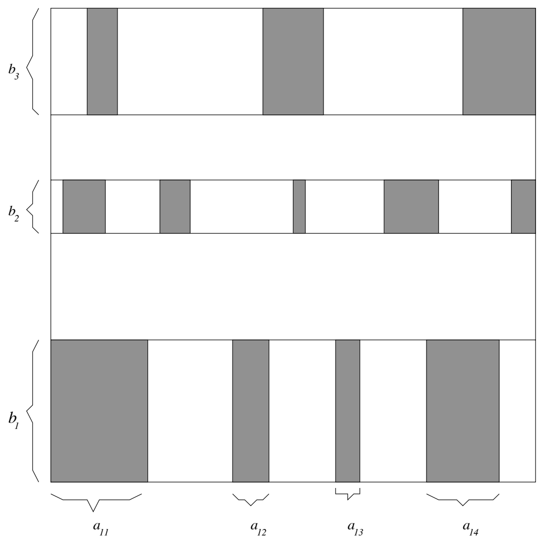
FIGURE 1. $l = 4$, $m = 3$

$$f_0 \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 \quad f_0(x,y) = (lx, my) \quad l > m > 1$$

Λ_0 Repulsor relativo a f e à partição de Markov

2) Gatzouras, Lalley (1992)

Fórmula para DH para *certas transformações afins*:



$$b_i \geq a_{ij}$$

Theorem 1. *(N. Luzia)*

$$\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \sup_{\mathbf{p}} \{\lambda(\mathbf{p}) + \mathbf{t}(\mathbf{p})\} \tag{1}$$

onde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ *é um vector de probabilidade,*

$$\lambda(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i \log b_i}$$

e

$$t(\mathbf{p}) \in [0,1] : \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \log \left(\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}^{t(\mathbf{p})} \right) = 0.$$

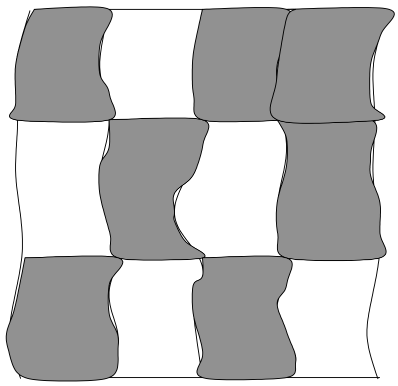
3) (a aparecer em Ergodic Theory & Dynamical Systems)

Fórmula para DH para

C^2-*perturbações de tapetes de Sierpinski*

invariantes por

$$f(x, y) = (a(x, y), b(y))$$



(f, Λ)

Fixar n grande. Fingir que f^n age linearmente em rectângulos básicos de ordem n e aplicar caso afim. Erro é controlado por *distorção limitada*

Discretização

$R^n_{\mathbf{ij}}$ básico ordem n

$R^n_{\mathbf{i}}$ Intervalo básico vertical ordem n

$$a_{\mathbf{ij},n} = \max_{R^n_{\mathbf{ij}}} (\partial_x a^n)^{-1} \qquad b_{\mathbf{i},n} = \max_{R^n_{\mathbf{i}}} ((b^n)')^{-1}.$$

$\partial_x a^n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \partial_x a(f^j z)$

$\mathbf{p}^n = (p^n_{\mathbf{i}})$ vector de probabilidade

$\lambda_n(\mathbf{p}^n)$ e $t_n(\mathbf{p}^n)$

$$\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \sup_{\mathbf{p}^n} \{\lambda_n(\mathbf{p}^n) + t_n(\mathbf{p}^n)\} \pm \frac{C}{n}$$

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu_{\mathbf{p}^n} = \lambda_n(\mathbf{p}^n) + t_n(\mathbf{p}^n) \pm \frac{C}{n}$$

Vale Princípio Variacional para a Dimensão de Hausdorff:

$$\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f|\Lambda)} \dim_{\mathrm{H}} \mu$$

Problema: Existe μ^* tal que $\dim_{\mathrm{H}} \Lambda = \dim_{\mathrm{H}} \mu^*$?